ADRIÁN PAENZA

LA MATEMÁTICA DEL FUTURO

SUDAMERICANA

Adrián Paenza

La matemática del futuro

Sudamericana

SÍGUENOS EN

megustaleer

@Ebooks

@megustaleerarg

@megustaleerarg_

Penguin Random House Grupo Editorial

Dedicatorias

A mis padres, Fruma y Ernesto. Como escribí en todos los libros, todo lo que soy se lo debo a lo que ellos hicieron por mí.

A mi hermana Laura y mi cuñado Daniel.

A todos mis sobrinos: Lorena, Alejandro, Máximo, Andrea, Ignacio, Paula, Santiago, Lucio, Matías, Lucas, Amanda, Anderson, Brenda, Dante, Diego, Ellie, Gabriel, Griffin, Jason, Landon, Luca, Luz, María, María José, Mario, Marius, Max, Mía, Miguelito, Natalie, Nicola, Riley, Sabina, Sebastián, Ulises, Valentín, Valentina, Viviana y Whitney.

A Carlos Griguol y León Najnudel, dos fuentes de inspiración inagotables y los faros que me guiaron la mayor parte de mi vida.

A los cuatro amigos con quienes me crié: Leonardo Peskin, Miguel Davidson, Lawrence Kreiter y Miguel Fernández.

A mis amigas Alicia Dickenstein, Ana María D'Alessio, Andrea Salvucci, Beatriz de Nava, Betty Cooper, Betty Suárez, Carmen Sessa, Cristina Serra Selva, Edy Gerber, Érica Kreiter, Etel Novacovsky, Glenda Vieites, Isabel Segurola, Julie Rogers, Karina Griguol, Kim Morris, Laura Bracalenti, Many Oroño, Marcela Smetanka, María Marta García Scarano, Mariana Salt, Marisa Giménez, Marisa Pombo, Marta Valdano, Martina Cortese, Mónica Muller, Nilda Rozenfeld, Nora Bar, Nora Bernardes, Norma Galetti, Montse Besa, Pamela Rocchetti, Patricia Breyter, Paula Aimonetto, Raquel Maccari, Teresa Krick, Teresa Reinés y Verónica Fiorito.

A mis amigos Alejandro Fabbri, Andrés Nocioni, Ariel Hassan, Baldomero Rubio Segovia, Carlos Aimar, Carlos Delfino, Claudio Martínez, Claudio Pustelnik, Craig Rogers, Cristian Czubara, David Boodey, Dennis Fugh, Don Coleman, Ernesto Tiffenberg, Fabricio Oberto, Fernando Pacini, Floyd Canaday, Fred Weis, Gary Crotts, Gerry Garbulsky, Hugo Soriani, Jorge Ginóbili, Jorge Valdano, Juan Ignacio Sánchez, Juan Pablo Pinasco, Julio Bruetman, Keith Morris, Kevin Bryson, Lenny Gunsteen, Luis Bonini, Luis Scola, Marcos Salt, Ocar Bruno, Pablo Prigioni, Pep Guardiola, Ramón Besa, Raphael James, Ricardo Medina, Santiago Segurola, Víctor Hugo Marchesini y Woody González.

A mis primas Lili, Mirta y Silvia y a mi primo Josi.

A Guido y Soledad. Nunca voy a sobreponerme a la pérdida de dos personitas que vieron interrumpidas sus vidas cuando virtualmente no las habían empezado.

A la memoria de mis tías Delia, Elena y Elenita, de mi primo Ricardo, de mi tío Saúl, del inolvidable Héctor Maguregui, de Juan Denegri, Noemí Cuño, Lola Bryson, Manny Kreiter y Vivian Crotts, y una vez más, mi gratitud perenne para otro amigo entrañable: Jorge Guinzburg.

Y para el final, todo libro estará siempre dedicado a las cuatro personas que son mis guías éticos: Alberto Kornblihtt, Marcelo Bielsa, Víctor Hugo Morales y Horacio Verbitsky.

Agradecimientos

La vida me regaló la oportunidad de interactuar con muchísima gente. A cada persona que voy a mencionar acá, le debo 'algo'. Eso que les debo se describe con una palabra: gratitud. No todos me ofrecieron lo mismo. Sin embargo, hay *tres* características que son comunes a todos: afecto, tiempo e ideas.

Esta vez los *betatesters,* o sea, aquellos que fueron leyendo las historias que aparecen en el libro fueron seis (y medio): Carlos D'Andrea, Juan Sabia, Alicia Dickenstein, Carlos Sarraute, Manu Ginóbili y Claudio Martínez. El *medio* le correspondió a Leandro Garbulsky, uno de los hijos de Gerry. Como escribí antes: la gratitud está, pero ¿será suficiente para que se note cuánto representa lo que hacen o hicieron por el libro en general y por mí en particular? No lo sé, pero espero que usted, que está leyendo estas líneas, sepa que hay un grupo reducido de personas que le dedicó *su tiempo* (¡nada menos!) para mejorar lo que sigue.

A las dos personas que tengo más cerca en mi vida cotidiana en temas profesionales (y personales): Glenda Vieites y Claudio Martínez. Una observación: son extraordinariamente sensibles e increíblemente respetuosos de todas las personas que los rodean. Viven sonriendo y cooperando para que los de alrededor sonrían también. ¿Usted conoce a muchas personas así?

A toda la gente que trabaja en Penguin Random House y que de una u otra forma colaboró conmigo. Empiezo por Pablo Avelluto, porque él y Glenda Vieites fueron los que me convocaron para que me sumara a la editorial; pero después, el calor con el que me abrigan *siempre* Javier López Llovet, Juan Ignacio Boido, Gabriela Vigo, Mariana Creo, Verónica Larrea, Daniela Morel, Ana Dusman, Mariana Vera, Fernanda Mainelli, Érica Marino, Lucrecia Rampoldi, Vanina Farías y Max Rompo. Sepan que no me pasan inadvertidos, ninguno de ustedes.

Por supuesto, el recuerdo para Carlos Díaz, Diego Golombek, Violeta Collado y Héctor Benedetti de Siglo XXI Editores. Ellos empezaron esta saga, y mientras haya *una línea* que alguna editorial

decida publicar con mi firma, en alguna parte tienen que aparecer los nombres de ellos cuatro.

También deben estar los nombres de los matemáticos que me formaron, los profesores que tuve, los que más recuerdo por la incidencia que tuvieron. Desde mi mentor/guía/tutor/amigo Miguel Herrera, pasando por los tres que influyeron más sobre mí por su increíble capacidad didáctica: Enzo Gentile, Luis Santaló y Horacio Porta. Y a mi querido Eduardo Dubuc, un matemático *extraordinario* y una *mejor persona*: *¡único!* No sé si en mi vida aprendí *más* que con y de Eduardo. Y, por supuesto, a quien me inició en todo: Ángel Larrotonda.

También quiero mencionar especialmente a mis compañeros más cercanos, con quienes hice mi carrera, y a algunos alumnos con quienes terminamos construyendo una relación de amistad muy fuerte: Marcela Fainbrum, Teresita Freidenberg, Nicolás Búcari, Ricardo Noriega, Malena Becker, Carlitos Sánchez, Hugo Álvarez, Carlos D'Andrea, Carmen Sessa, Alicia Dickenstein, Juan Sabia, Fernando Cukierman, Gerardo Garbulsky, Noemí Wolansky, Teresa Krick y Ricardo Durán.

Hay otro grupo grande al que quiero rendirle un tributo a pesar de que estemos circunstancialmente distantes física y temporalmente. A varios no los veo desde hace mucho tiempo, pero los sigo queriendo de la misma forma y no me olvido de *todo* lo que hicieron por mí. Con todos ellos interactué *alguna vez* en Exactas, UBA: Lucas Monzón, Gustavo Stolovitzky, Leandro Caniglia, Oscar Bruno, Luis Cafarelli, Cristina López, María del Carmen Calvo, Eduardo Antín, Miguel Ángel López, Luis Mazziotti, Juan José Martínez, María Angélica Tancredi, Silvia López, Gabriela Jerónimo, Cristian Czubara, Pablito Calderón, Graciela Fernández, Josefina Dolores Alonso, el "Negro" Corbalán, Alfaro, Marina, Ariel Arbiser, Jorge Zilber, Pablo Coll, Pablo Milrud y Matías Graña.

A continuación figura otro subconjunto *enorme* de personas a las *no conozco* del ámbito académico, sino del de los medios de comunicación. Quiero agradecerles a Deborah Gornitz, Alejandro Burlaka, Betina Rodríguez, Claudia Eiberman, Dolores Bosch, Elisabeth Alegre, Ezequiel Rodríguez, Gabriel Díaz, Laura Cukierman, Ignacio Martínez, Pedro Martínez, Luis Hassan, Carla Novak, Mario Bouco, Paola Russo, Paola Campodónico, Yanila Ghio, Andrés Gericke, Augusto Albo, Yamila Abud, Fernando Nogueira, Gustavo Cataldi, Fernando Morón y Valeria Trevisán. Como escribí alguna otra vez, ustedes… *todos*… tocaron mi vida en algún momento y la hicieron mejor, sin ninguna duda.

Quiero subrayar mi relación con tres personas con quienes tengo —en apariencia— solamente una relación profesional: Guillermo Schavelzon, Bárbara Graham (quienes me representan en mis actividades literarias) y Aldo Fernández (uno de los dueños de la productora El Oso y quien me contrata para los programas de televisión en los que trabajo). Como no sé comunicarme con gente que no quiero, tengo el privilegio de poder contar con ellos tres, por el afecto con el que me tratan y por la forma en la que me protegen. Eso sucede porque hemos logrado generar vínculos que nos sirven para eludir las tensiones que inexorablemente emergen cuando hay dinero de por medio. En nuestro caso, eso *nunca se nota*, y que así suceda es un mérito exclusivamente de ellos.

Como usted advierte, la lista de personas a quienes quiero agradecer es cada vez más larga, pero yo creo que de eso se trata: *regar las plantas de la gratitud de forma sistemática y constante*. Hacer lo posible para que las personas con quienes voy caminando en mi vida, sepan del afecto que me generan.

Esta es una buena oportunidad para enfatizar lo importante que es y fue para mí haber contado con un grupo extraordinario de personas que *pusieron varias cosas personales en juego* para sostenerme, estimularme y conducirme. Por supuesto que está Claudio Martínez, pero quiero resaltar otros nombres: Tristán Bauer, Verónica Fiorito, María Marta García Scarano, Martín Bonavetti y Javier Grossman. Cada uno de ustedes sabe por qué, y si no lo saben, lo sé yo: ¡gracias! Y hay otros tres que me ayudaron ofreciéndome una estructura intelectual de la que yo carezco: Axel Kicillof, Emmanuel Álvarez Agis y Soledad Quereilhac.

A los tres titanes que conducen *Página/12*. Aún hoy siguen publicando mis columnas… y encima me quieren: Ernesto Tiffenberg, Hugo Soriani y Jorge Prim. Siempre un orgullo firmar en *Página/12*. Es lo que siempre me decía mi querida vieja: “¡Qué lástima que papá no vio tu firma en el diario!”.

Para el final, quiero ofrecer mi gratitud a los dos colectivos que integro con gran orgullo: el grupo CyTA (Ciencia y Técnica Argentina), en defensa de la investigación y desarrollo para la inclusión, y el Manifiesto Argentino, en búsqueda de una Argentina más justa, soberana, inclusiva e igualitaria.

Y no quiero terminar sin exhibir —una vez más— mi eterna gratitud a *todos* quienes fueron alumnos y a cada uno de los trabajadores de cada una de las empresas en las cuales desarrollo mi actividad profesional, ya sea El Oso Producciones, La Brújula, *Página/12* y Penguin Random House Grupo Editorial.

Prólogo

Este es el libro número doce. El primero apareció publicado en el año 2005. No es que tuviera *pocas* expectativas en aquel momento: no tenía ninguna. Yo nunca tuve ningún *objetivo* particular. Nunca tuve un *sueño* que cumplir. La vida fue un *suceder* de episodios que se encadenaron, con la guía de mis viejos y de mi familia, sencillamente *dejándome ser*. En todo caso, me ofrecieron el *privilegio enorme* de dejarme elegir y de prepararme de forma genérica para que yo decidiera qué quería estudiar, qué carrera seguir.

Estoy convencido de que cada niño nace con una cantidad de destrezas/gustos/pasiones latentes. El problema es que la escandalosa mayoría de esos niños no tiene las oportunidades que tuve yo. No es que esos padres sean peores que los míos: ¡por supuesto que no! Esos padres no pudieron o no pueden ofrecer a sus hijos lo que nuestros padres nos dieron a Laura (mi hermana) y a mí. En todo caso, yo no tuve que '*soñar*' nada, porque se me ofrecía '*todo*'. Lo único que se esperaba de mí era que me *esforzara*. Para ponerlo en los términos en los que me hablaba mi padre: "Vos tratá de ser lo mejor que puedas ser".

Una anécdota. Mi vieja quería que yo estudiara piano. Habían descubierto que tenía oído *absoluto*, algo que ciertamente no es un mérito personal sino que es una 'cualidad' con la que uno *nace*… algo así como tener ojos verdes o ser pelirrojo. Claro, para poder descubrir esa cualidad, uno necesita aprender/saber música. Si no, es imposible siquiera detectar que uno tiene ese *don*. Nunca supe bien cómo hicieron mis padres para saberlo o sospecharlo, pero lo que hicieron inmediatamente fue comprar un piano para que yo pudiera practicar. Este episodio por sí solo dice muchísimas cosas, pero hay *dos* que sobresalen fuertemente. La primera es que para generar y abonar un estímulo (como el de la música) es necesario ofrecer las herramientas. En este caso, se trataba de tener acceso directo e ilimitado a algún instrumento, y para eso *¡nos compraron un piano!*

Puesto en el contexto de nuestras vidas, no lo puedo pensar como un episodio aislado, sino como una manifestación de algo que fue una

suerte de 'máxima' en mi casa: "Acá tienen de todo: vayan, miren, prueben, practiquen, elijan. Cuando sepan qué es lo que les gusta, dedíquenle tiempo, pasión y esfuerzo. Los viejos 'bancamos'".

Y así fue. Siempre. Pero la segunda razón que quiero destacar es que además de querer… *¡hay que poder!* No cualquiera está en condiciones de salir y comprar un piano o una guitarra o un violín. O sea: por un lado, la voluntad y la ideología para generar las condiciones ambientales para que el niño se desarrolle (mi hermana y yo, en este caso), y por el otro, *¡la posibilidad económica de ejecutar el plan!*

A esta altura, y con todo derecho, usted se debe estar preguntando: ¿qué tendrá que ver todo esto con el libro que sigue? Créame que tiene *muchísimo que ver*.

Las historias que aquí relato son todas independientes, como si fuera un libro de cuentos. No están ligadas. Son historias cortas, 'autocontenidas'. Pero en alguna parte hay un mensaje que ni siquiera yo mismo logré descubrir hasta que me propuse escribir esto que usted está leyendo. ¿Qué mensaje?

Hay algo que está pasando en el mundo. Y de forma muy acelerada. Históricamente la matemática estuvo *siempre* ubicada en un lugar descartable, inentendible, como si fuera apto para un grupo privilegiado, cerrado… para muy pocos. Tanto jóvenes como adultos encontraban dificultades para explicar para qué y por qué uno estudiaba lo que estudiaba. Con el tiempo, hemos ido aprendiendo varias cosas. La primera (y más importante) es que la matemática que se enseña/enseñaba… *¡atrasa!* Pero no es que *atrasa* unos pocos años. ¡No! Atrasa casi cuatrocientos años. Es imperioso que modifiquemos esa percepción y, para hacerlo, hay que cambiar lo que se enseña, elegir dentro de la matemática misma otros contenidos, no solo más actuales, sino empezar por los más lúdicos, desafiantes y disfrutables. La vida pasa hoy por otro lado.

Es posible que a usted le parezca que mi visión es un poco *apocalíptica*. En ese caso, no me crea. Está en todo su derecho, pero le sugeriría entonces que lea alguna de las historias que aparecen en el libro. Si me lo permite, un poco más adelante, yo le voy a proponer una suerte de *hoja de ruta* o *itinerario* a seguir. Pero antes…

Estoy escribiendo este prólogo arriba de un avión[1]. Acabo de vivir un episodio que *necesito* comunicar y, como ya no hay más lugar en el libro *propiamente dicho*, voy a aprovechar este espacio.

Me tomé un tren desde el centro de Manhattan, en New York, para llegar hasta el aeropuerto de Newark, en New Jersey. Antes de ir hasta la puerta de embarque, me acerqué a un kiosco de revistas y libros.

Allí fue donde me sucedió algo que me impactó. Acompáñeme por acá.

Cuando uno se dispone a hacer un viaje más o menos largo, sea en ómnibus, tren o avión, la lectura suele ser una buena acompañante. Supongo que escuchar música también, pero yo prefiero entretenerme leyendo las noticias del día o algún libro o, si no, pensar algún problema de matemática. Conozco muchísima gente que le dedica parte de ese tiempo a resolver las 'palabras cruzadas'. Para eso, más allá de las que consigue en un diario o revista, existen fascículos especiales o pequeños 'libritos' que aparecen mensualmente y que traen diferentes variantes. Desde hace unos años, es posible conseguir ese mismo tipo de fascículos dedicados al Sudoku, algo así como el 'equivalente' de las palabras cruzadas pero con números.

Como el viaje no me ocuparía más de tres horas, elegí un par de diarios y el resto del tiempo lo dedicaría a pensar qué escribir en este prólogo. Cuando fui a pagar, mientras esperaba mi turno, casi sin querer me tropecé con el lugar en donde estaban expuestos los fascículos de *Palabras cruzadas* y *Sudoku*. De pronto, leí algo que me sorprendió. Pagué, puse los diarios en mi portafolio, y con el teléfono celular saqué varias fotos. Acá aparece una de ellas. Mírela con cuidado y fíjese qué le llama la atención. Por supuesto, estoy contando con que usted puede leer en inglés, pero si no pudiera, téngame un instante de paciencia y luego voy a hacer yo la traducción. Acá va:

Traduzco la parte que me parece más impactante: para promocionar el librito, es decir, para *conseguir clientes*, la propia compañía que los publica escribe en la tapa: "*No Math Skills Needed!*". Es decir, "¡No hace falta ninguna destreza matemática!".

Sinceramente, me costó trabajo entenderlo. Si yo pudiera resumir el problema que tenemos hoy en *todas las sociedades* —también en la norteamericana, como lo demuestra esta foto—, la idea es admitir que la matemática es 'rechazante'. Por lo tanto, si usted pensaba comprar este fascículo pero decidió no hacerlo porque creyó que podría involucrar algo de matemática, ¡no se preocupe! ¡No tiene nada de matemática! ¡No hay peligro! ¡Cómprelo con tranquilidad!

En algún sentido, es una suerte de *apología de la ignorancia: ¡no se preocupe, no hay que pensar!* Tremendo…

Ahora vuelvo al prólogo propiamente dicho. El libro *contiene muchísima matemática* y usted verá que las historias que yo elegí para contar tienen exactamente la idea *contraria* de lo que expresa la tapa que aparece en la foto. Mire: el mundo avanza en una dirección en la que las personitas que han vivido pocos años al día de hoy necesitarán utilizar herramientas que no están aún en la currícula escolar. Me explico sugiriéndole algunas historias.

Empiece con la que se llama “Tesla”. Allí entenderá lo que está sucediendo hoy con los autos que se manejan solos. Y no estoy hablando del futuro; estoy hablando del presente, de *hoy*… Yo estuve sentado en un vehículo de esas características. No lo piense solamente como un auto que se estaciona solo, o que mantiene una velocidad crucero cuando va en una autopista, o que le advierte al conductor si detecta algún síntoma de cansancio o si se está *saliendo del carril*. No. Me refiero a que el auto, además de estacionarse solo, descubre *¡el lugar en donde estacionarse!* Desde hace algunos años, el GPS llegó para ayudarnos a elegir caminos y/o rutas. Hoy, en el Tesla, uno elige el punto al cual quiere llegar y el auto no solo encuentra la ruta más corta y/o más rápida teniendo en cuenta el tránsito (potencial) que habrá, sino que ¡lo lleva sin que usted tenga que poner un solo dedo en el volante ni un pie en el freno y/o acelerador! Más aún: usted puede encender el auto desde su casa sin importar dónde se encuentre el vehículo, indicarle a qué hora quiere que lo pase a buscar de manera tal que lo esté esperando en el momento que usted programó, lo lleve hasta donde usted quiere ir, lo deje allí y, o bien encuentra un lugar en donde estacionarse para esperarla/lo, o bien vuelve a su casa manejándose solo para no ocupar lugar en un garaje público.

Esto no se hace solo. Hay una increíble cantidad de matemática involucrada. Programación, estadística, optimización, satélites, sensores, física, ingeniería e inteligencia artificial. ¿Un matemático *ahí* por favor?

Salga de “Tesla” y vaya hasta “AlphaGo” o “Libratus”. El hombre ya desarrolló programas que le ganan a cualquier humano (o al menos, *no pierden con ningún humano*) si se trata de alguno de los juegos milenarios. El caso más recordado, por la trascendencia internacional que tuvo, fue el de la computadora (o programa) que IBM llamó *Deep Blue*, y que sirvió para derrotar al entonces campeón del mundo de ajedrez Garri Kaspárov. Fue un momento histórico y celebrado también. El paso hacia adelante que habíamos dado (en tanto que humanos) logró mostrarle al mundo lo que éramos capaces de hacer. Pero *Deep Blue* era un programa extremadamente caro, imposible de adquirir para una persona común. En todo caso, sirvió para mostrar la potencia que teníamos. Eso fue en 1997. Pasaron exactamente veinte años. Hoy el humano más calificado no puede ganar —virtualmente— frente a casi cualquier programa que juegue al ajedrez y que son de fácil acceso aun de forma gratuita.

El juego de damas ya había sucumbido, pero quedaban en pie dos de los más importantes, y además diferentes entre sí: el *Go* y el *poker*.

Los expertos en inteligencia artificial sostenían que habríamos de

necesitar más de una década para que una computadora pudiera ganar al *Go* si jugaba contra los mejores del mundo. Quizás sea un juego que a usted no le diga nada, como no me decía nada a mí hasta hace un tiempo. Es *parecido* al ajedrez (en el sentido de que se juega en un tablero) pero en lugar de ser de 8 × 8, el que sirve para el *Go* es de 19 × 19. Se juega en todos los países de Oriente (China, Japón, Indonesia, India, Pakistán, las dos Coreas, Singapur…) y es ciertamente uno de los más populares. Cuando Lee Sedol, el surcoreano que en ese momento era el campeón del mundo, aceptó enfrentar a la computadora cargada con el programa *AlphaGo* diseñado por Demis Hassabis y sus colaboradores ingleses, una buena parte del mundo se detuvo: cada una de las cinco partidas fueron seguidas *¡en vivo… por más de cuatrocientos millones de personas!* Si puede, no se pierda esa historia y verá lo que sucedió con el millón de dólares que estaba en juego.

Por otro lado, en todos estos juegos (*damas, ajedrez, Go*), las piezas o las fichas están a la vista de los dos participantes, no hay nada escondido. Cada uno 've' lo que tiene la/el rival. La historia es diferente si uno decide jugar a las cartas. ¿Qué pasará con el poker? Porque en el poker, uno no ve *todo* el juego del rival, el poderío que tiene en sus manos.

Si me permite, quiero agregar algo más que es *muy importante: en el poker, si uno pretende ganar, necesita poder hacer 'bluff'*. ¿Qué quiere decir 'bluff'? Piénselo así: usted necesita 'engañar' a su oponente. Es lo mismo que sucede en el 'truco'. Está muy claro que para poder ganar, parte de la estrategia es tratar de hacerle creer al rival que uno tiene 'buenas cartas', aunque no sea así. Pero hay más. Aunque parezca paradójico, ¡necesita *perder* alguna vez! Necesita que el rival la/lo sorprenda mintiendo para que la próxima vez que usted quiera que ella/él crea que usted tiene buenas cartas, no sepa si miente o diciendo la verdad. Es que, por ejemplo, si *todas* las veces que usted canta '*envido*', *siempre* tiene buenas cartas, su rival nunca va a aceptar su propuesta. En cambio, si usted la/lo hace dudar, eso obra en beneficio suyo.

Escribí todo esto para sugerirle que lea "Libratus". Es la primera vez en la historia que un programa juega al poker. No, perdón… está mal: no es la primera vez que un programa *juega* al *poker*: es la primera vez que un programa… Mejor no sigo: vaya usted y lea la historia porque es fascinante lo que sucedió. ¡Las máquinas aprendieron a *mentir*!

Cuando haya llegado a este punto, *necesito* pedirle que no avance hacia ninguna otra historia *antes* de leer "El próximo Rembrandt" y

“Novela”. Me explico. El 31 de mayo del año 2017, fui a escuchar una charla que se ofrecía en uno de los anfiteatros de la NYU (la Universidad de New York), en el marco del Festival Mundial de Ciencia. El título era: “Computational Creativity: AI and the Art of Ingenuity” (“Creatividad Computacional: Inteligencia Artificial y el Arte de la Imaginación”)[2]. Lo que vi allí *¡me voló la cabeza!* Sí, así nomás. Si confía en mí, lea estas dos historias y me entenderá un poco mejor. Desde que aparecieron las computadoras, los humanos creímos que ellas harían todas las tareas u oficios repetitivos y que se podían hacer *sin pensar*. En todo caso, la *creatividad* nos quedaba a nosotros. Eso es lo que las máquinas *nunca podrían hacer*. Bueno… no estoy más convencido de que eso sea cierto y por eso le sugiero que vaya tan pronto como pueda a leer “El próximo Rembrandt”.

Es obvio que no ignoro todos los problemas que hay en el mundo, pero la *única* manera de enfrentarlos es a través de la educación y el pensamiento crítico. La matemática es una herramienta sustancial e irremplazable. Las otras ciencias tienen múltiples defensores. La matemática, no. Es por eso que escribí una historia que se llama: “¿Estamos mejor o peor?”.

No se quede con mi conclusión, que en definitiva es solamente una opinión más. ¿Cuál es la suya? ¿Estamos mejor o peor?

Si me permite que le siga sugiriendo algunos caminos a recorrer, vaya hasta la que se titula “Tetris”. Póngase a prueba para ver si puede elaborar una estrategia para resolver el problema que planteé allí: me tuvo *loco* durante un buen tiempo. Fíjese lo que le sucede a usted.

Hay otra anécdota increíble. Es la que tiene como protagonista a Galileo. Sí, al mismo Galileo del que usted y yo hemos oído hablar. Pero el contexto en el que aparece acá es totalmente inesperado. Tal como podría suceder hoy, verá que aun en aquella época había *timadores* y *tahures*, personas que viajaban de pueblo en pueblo engañando a los que iban a las kermeses a jugar, por ejemplo, a los dados. Parecía que todos tenían la misma probabilidad de ganar, pero la práctica demostraba otra cosa. Para dilucidar el problema, tuvieron que recurrir al propio Galileo… El relato y la matemática involucrada están allí.

La historia de “La blusa y el billete (robado) de cien pesos” es otra imperdible. Me explico. Este problema me lo contó Alicia (Dickenstein), una de las vicepresidentas de la Asociación Internacional de Matemática, la primera argentina en ocupar esa distinción. Alicia estaba en Oslo y me escribió sobre un problema que circulaba por internet. Me pareció extraordinario porque a medida que

lo fui *testeando* con muchas personas, obtuve una increíble cantidad de respuestas diferentes. Después, lo fui presentando ante distintas audiencias en países diversos y, curiosamente, ¡en todas las culturas sucede lo mismo! Una vez más, si me permite, le sugiero que no abandone el libro antes de haberlo intentado. Verá que valió la pena.

Uno de los mejores matemáticos del mundo es Terence Tao. Cuando tenga tiempo, hágase un ratito y googlee su nombre. Hoy ya tiene 42 años, pero verá que su historia es muy interesante. Él fue quien propuso el problema que se llama "Atándose los zapatos". Suponga que usted está en un aeropuerto (por ejemplo) y tiene que caminar un trecho sobre un piso normal y otro tanto sobre una cinta que avanza en la dirección a la que usted quiere ir. Súbitamente descubre que tiene los zapatos desatados… ¿Qué le conviene hacer? ¿Atárselos cuando está arriba de la cinta o hacerlo cuando está en el piso? Por otro lado, suponga que usted pudiera *correr* un trecho. ¿Qué le conviene hacer en este caso? ¿Correr cuando va en la cinta o cuando va sobre el piso? Este problema me hizo acordar a uno que pensábamos en mis tiempos de alumno en la Ciudad Universitaria ubicada en Núñez, en Buenos Aires. En aquel momento, después de bajar del tren, íbamos sobre 'caminitos' de tierra y, a veces, de barro. Tanto es así que, cuando llovía intensamente, solíamos preguntarnos con Miguel y Jorge Davidson (ambos físicos nucleares con quienes me crié de niño): ¿es mejor correr y mojarse más pero menos tiempo o ir caminando a paso normal, mojarse más tiempo pero menos superficie? ¿O da lo mismo? El artículo de Tao es muy atractivo y le ofrecerá la oportunidad de pensar cuál es la respuesta correcta, y sobre todo… *el porqué.*

A lo largo del texto se encontrará con algunas preguntas que —creo— nos surgieron a todos. Por ejemplo: *"¿Las computadoras no se equivocan nunca?"*. Bueno, uno tiene la tentación de decir que no, que no se equivocan nunca. Pero ¿es verdad esto? ¿Habrá algunos ejemplos en contrario? Si lee esa historia verá lo que sucedió con una particular computadora que fabricaba IBM con un microprocesador que proveía Intel. Dos gigantes que tuvieron un problema muy serio que los obligó a cambiar de política y renunciar a una posición que inicialmente fue muy arrogante.

Sin embargo, también las computadoras y los programas han avanzado de tal manera que ahora se nos plantean problemas que nunca tuvimos antes. Problemas éticos sobre los que la humanidad no tuvo que legislar, sencillamente porque no hubieran tenido sentido. Hay varios ejemplos que tipifican estas situaciones, pero uno de los más clásicos es el siguiente.

Suponga que usted está como pasajero en un automóvil que se maneja solo. Súbitamente se cruzan dos personas en su camino. El vehículo *sabe* que no llegará a frenar por la velocidad a la que se desplaza. Un humano, si estuviera conduciendo, movería el volante hacia alguno de los dos costados. El auto podría estar programado para hacer lo mismo. Ahora bien: mientras los que cruzan son dos personas, el vehículo advierte que si moviera el volante hacia la derecha, se encontraría con *diez personas* que están esperando un colectivo… Entonces ¿qué hace? ¿Se lleva por delante a los dos que cruzan o se estrella contra los que están en la parada? *Algo* que hay que programar, incluso si se decidiera *no hacer nada*. En sí mismo, no hacer nada *es* decidir. Entonces ¿quién o quiénes deciden qué es lo que hay que programar en los vehículos? ¿Es una decisión que dejaríamos a los fabricantes de autos? ¿O uno podría tener una *palanquita* en cada automóvil de manera tal que el dueño decida lo que quiere hacer? ¿O cada sociedad deberá darse sus propias reglas?

Otro problema ético muy serio es el que aparece en la extrapolación de nuestros prejuicios a los programas que diseñamos. Sí, lo que leyó: *la extrapolación o prolongación de nuestros prejuicios a los programas que nosotros mismos diseñamos*. Me explico: hasta hace no mucho tiempo, programábamos las computadoras indicándoles paso por paso qué es lo que tenían que hacer. Si me permite la expresión, diría que los programas eran 'bobos': hacían lo que les habíamos dicho que hicieran. Pero con el tiempo aparece la *Inteligencia Artificial.* Las máquinas *aprenden*. Nosotros les enseñamos qué es lo que está 'bien' y qué es lo que está 'mal'. Por ejemplo, para indicarle a un robot cómo se cruza una calle, cargamos su memoria con miles de ejemplos donde una persona cruza 'bien' y otra cantidad equivalente donde una persona cruza 'mal'. La computadora deduce entonces qué es lo que se espera de ella, aprende a distinguir el supuesto 'bien' del supuesto 'mal'. Hasta acá, todo bárbaro. Pero ¿qué pasa cuando lo que nos parece *bien* o *mal* transfiere a la computadora algunos *prejuicios* que ni siquiera sabíamos que teníamos? Es decir, los estamos *extrapolando*. ¿Cómo solucionar esto? Le propongo entonces que lea la historia que lleva justamente ese título: "Prejuicios".

Otra historia muy interesante y en una dirección totalmente diferente de las anteriores es la clasificación de los 'saberes'. ¿Qué es lo que uno *sabe*? ¿Qué es lo que uno *cree* que sabe? ¿Qué es lo que uno sabe pero *no sabía* que lo sabía? ¿Qué es lo que uno *no* sabe? Más aún: ¿qué es lo que uno ni siquiera sabe que *no sabe*? La clasificación de los 'saberes' invita a mantenerse humilde. No solo se trata del montante de información que uno no posee pero *sabe* que no posee, sino que es

abrumadora la cantidad de cosas que *uno ignora* que no sabe. Parece un *trabalenguas* pero, créame, no lo es.

Este prólogo se parece cada vez más una versión abreviada (¿?) del libro que sigue, pero no quiero terminarlo sin sugerirle algunas historias más. Por ejemplo, las que involucran a la Teoría de Juegos. Reproduje una parte de un trabajo publicado por el economista/matemático español Ignacio Palacios-Huerta que me sirvió para pensar cómo responder el siguiente planteo: suponga que se está por definir un partido que corresponde a una copa del mundo de fútbol. El partido terminó empatado. Jugaron 30 minutos más pero sigue el empate. Los dos equipos se preparan a tirar (de forma alternada) cinco penales cada uno. Hasta acá, todo muy conocido. Sin embargo, si usted fuera el capitán de uno de los dos equipos y tuviera que optar: ¿le conviene patear primero o segundo? ¿O da lo mismo?

Antes de avanzar, ¿no le parece fascinante que haya gente que estudió el problema y que estadísticamente explica, *con datos que lo sustentan*, qué posición conviene adoptar?

Como usted advierte, yo podría seguir hasta agotar todos y cada uno de los problemas que siguen. ¿De qué se trata "El reloj de Fibonacci"? ¿Y qué sucede con los números que aparecen en todas las tarjetas de crédito o de débito? Se supone que *identifican* a la persona que la presenta, pero ¿hay algo más que está escondido o invisible y que es *transparente* para nosotros, los usuarios?

Y no se pierda la historia que llamé "Sopa". Sí, sopa. Es interesante descubrir la relación que hay entre las encuestas que se hacen antes de cualquier elección y probar una sopa que todavía se está cocinando… y determinar si está lista o no, si está salada o no.

Muchas veces, cuando alguien me pide que le firme un libro, además de escribir mi nombre, agrego: "Ojalá que usted disfrute al leerlo tanto como yo al escribirlo".

Ahora sí, le toca a usted.

1. Escribo estas líneas el 3 de agosto de 2017 en un avión que viaja desde el aeropuerto de Newark, en New Jersey, Estados Unidos, hasta O'Hare, el aeropuerto internacional de Chicago.

2. Por un lado, las iniciales AI representan '*Artificial Intelligence*', o sea, '*Inteligencia Artificial*' en castellano. Por otro lado, me es difícil traducir la palabra '*ingenuity*'. La tentación es escribir '*ingenuidad*', pero no es correcta. Preferí usar '*imaginación*', aunque podría haber sido '*innovador*', '*perceptivo*', '*inspiración*'. Espero

que se entienda la idea.

¿Estamos mejor o peor?

¿Cómo definir lo que es *matemática recreativa*? ¿Qué es lo que la transforma en recreativa? ¿Tiene que ser *entretenida?* Seguro. ¿Requiere de muchos conocimientos previos? Yo creo que no, la idea es que uno pueda abordarlos sin necesidad de tener una gran infraestructura teórica, que esté —virtualmente— al alcance de cualquier persona que tenga ganas de pensar. ¿Tiene que ser *fácil*? No, no necesariamente. Los problemas en sí mismos deberían ser 'sencillos' de entender, pero eso no garantiza que van a ser fáciles de resolver. Si se transforman en *muy difíciles*, entonces se *corren* para el otro lado, *cruzan* de orilla.

Por ejemplo, el Problema de los Cuatro Colores[3] es fácil de entender y *muy difícil* de resolver. De hecho, la *única* demostración que se conoce hasta hoy requiere la utilización de computadoras y, por ahora, no hay una prueba *teórica* que deje satisfechos a los matemáticos 'puros'[4].

El Último Teorema de Fermat[5] fue una conjetura durante varios siglos. Llevó casi cuatrocientos años poder resolverlo, hasta que finalmente lo logró el matemático británico Andrew Wiles. Fermat escribió que él sabía cómo se contestaba la pregunta que él mismo había formulado, pero que no le alcanzaba el 'margen' de la hoja para hacerlo. Se murió antes de poder aportar su 'famosa prueba'. Muchas de las herramientas y conexiones que terminó usando Wiles (y otros matemáticos que lo asistieron) no existían no solo durante la época de Fermat sino incluso en la del propio Wiles. Fue él mismo quien las tuvo que 'inventar' o 'crear'. El grado de dificultad que conllevan hace sospechar que Fermat no lo habría podido demostrar aunque le hubieran dado *múltiples márgenes para escribir*, pero eso ya nunca lo vamos a saber.

De todas formas, tanto el Problema de los Cuatro Colores como el Último Teorema de Fermat tuvieron un final 'feliz'. Hay muchísimos otros que todavía se resisten. Uno de los más famosos es el Problema del Viajante de Comercio[6], cuyo enunciado es fácilmente comprensible pero hasta hoy, junio del año 2017, no se conoce una forma de resolverlo a la que se pueda llegar *en tiempo 'real'*.

Elegí tres ejemplos muy distintos pero que tienen algo en común. Como tienen un enunciado sencillo y son muy fáciles de entender, la tentación es imaginarlos como parte de la matemática recreativa. Sin embargo, lo único 'recreativo' es pensarlos, porque ciertamente pertenecen a la otra categoría, a la matemática 'seria'.

Por otro lado, quienes hacen matemática recreativa suelen tener una intención que no sé si llamar subliminal o sutil o intangible. Es la que trata de *seducir* al interlocutor. Es mucho más fácil convocar a alguien a pensar un problema como el de los Cuatro Colores o el del Viajante de Comercio, que uno que involucre la Teoría de Autovalores o de Geometría Algebraica, por poner solo un par de ejemplos.

O sea, en alguna parte hay una combinación de entretenimiento y pedagogía, y también 'seducción'. Usted elija los porcentajes de cada una que prefiera usar. Supongo que también dependerá de la situación y de quién es su interlocutor/a.

La matemática recreativa es tan antigua como la matemática misma. En el Museo Británico, ubicado en el centro de Londres, están exhibidos los llamados "Papiros Matemáticos de Rhind"[7]. Corresponden al año 1650 antes de Cristo y los compró en Egipto el propio Henry Rhind en 1858. Más adelante, sus herederos los donaron al museo. Si usted tuvo o tiene oportunidad de visitarlo, podrá ver la enorme cantidad de problemas que allí se exponen. Son universalmente reconocidos como los primeros registros que dan cuenta de lo que sucedía en términos matemáticos más de quince siglos antes de la aparición del cristianismo.

Por ejemplo, el problema número 79 incluye una pregunta que involucra siete casas. Cada casa tiene siete gatos. Cada gato se come a siete ratones. A su vez, cada ratón se come siete platos de semillas y de cada uno de esos platos de semillas se pueden esperar siete plantas de choclo[8].

Si uno quiere averiguar la cantidad de 'animales' (ratones, gatos) y 'objetos' (casas, platos de semillas, plantas de choclo) que aparecen involucrados en la historia, hace la siguiente cuenta:

$$7 + 49 + 343 + 2401 + 16807 = 19.607$$

que corresponde a hacer la suma de una progresión geométrica de razón 7:

$$7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 = ((1 - 7^6)/(1 - 7)) - 1 = 19.607$$

Este número, 19.607, es la cantidad de plantas de choclo que se

podrían obtener si uno sumara las que hay en *todas* las casas.

Un problema equivalente al sumar las potencias de 7 aparece también con Fibonacci en el año 1202. Quienes analizan la historia de la matemática tienen la tentación de ignorar el *bache temporal* e imaginar que estos problemas se originan en los Papiros de Rhind. En cualquier caso, lo que queda *muy claro* es que este particular problema *no tiene ninguna conexión con todo el resto del texto,* por lo que se supone que fueron incluidos como *diversión o entretenimiento.*

Los trabajos más antiguos que se conocen de Babilonia también datan del año 1800 antes de Cristo. En uno de ellos se puede leer este problema (lo que sigue es *una traducción literal*): "Yo sé que si sumo el largo y el ancho de un rectángulo obtengo el número 27, mientras que si sumo el área más la diferencia entre el largo y el ancho, obtengo el número 183. Encuentre las medidas de los lados del rectángulo"[9].

Puesto en estos términos, uno tiene ganas de ir y matar[10] a los babilonios que escribieron el enunciado, como haría con cualquier persona que presente hoy este problema. ¿Quién, en su sano juicio, quiere hacerle creer a un alumno que uno tiene *este tipo de problemas* en la vida cotidiana? ¿Cómo no van a 'odiar' la matemática?

En realidad, la respuesta que uno tendría que dar es la siguiente: "Si usted fue tan capaz de saber que al sumar el largo y el ancho le dio 27, entonces mida bien cada lado y obtendrá el resultado que busca".

Volviendo a los babilonios, supongo que la idea era demostrar, de una forma que ellos creyeron *ingeniosa y más entretenida para el estudiante,* cómo resolver un problema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Por otro lado, como escribí anteriormente, es muy difícil encontrar el límite entre *una matemática* (la recreativa) y *la otra matemática* (la seria). Los bordes que separan una de otra son difusos y *muchísima matemática seria tiene su origen en la matemática recreativa.*

Sin pretender hacer un análisis exhaustivo, quiero incluir a la matemática que se necesita para elaborar *estrategias*, las que terminaron dando el puntapié inicial a la Teoría de Juegos. Además están todos los problemas populares que dieron lugar a la Teoría de Grafos. Sin ir más lejos, esta teoría era considerada originalmente como parte de la *matemática recreativa,* pero hoy aparece como una rama importante de la matemática seria y una fuente de inspiración para la Topología.

Ahora bien: sin ninguna duda, uno de los momentos de *quiebre* en la historia de la matemática se produce con las discusiones entre dos franceses (Pascal y Fermat) a mediados del siglo XVII, allí por el año 1650. Decir que ambos eran matemáticos es ciertamente injusto; no

porque no lo fueran, sino porque en aquella época eran poseedores de *muchos* saberes, se los consideraba los '*sabios*' de la época.

Pero la historia hace justicia con ellos al elegirlos como los 'creadores' (o 'iniciadores') de lo que hoy se conoce como la Teoría de Probabilidades y Estadística. Los primeros ladrillos de la teoría aparecen en el intercambio epistolar entre ambos tratando de resolver este problema: "¿Qué es más probable que suceda? ¿Que uno saque un *seis* al tirar un dado cuatro veces o que saque un *doble seis* tirando *dos dados* veinticuatro veces?".

La matemática que se requiere para elaborar estrategias es algo mucho más reciente. Aparece en la literatura a principios del siglo XX. El desarrollo más importante sucede durante la Segunda Guerra Mundial, sobre todo con la irrupción en el centro de la escena de dos colosos del área: John Von Neumann y John Nash. Sus trabajos son los que comienzan a dar una *estructura teórica* a lo que hoy se llama Teoría de Juegos.

Antes de avanzar, un dato que a mí me resultó *impactante.* Cuando apareció el Rubik Cube o Cubo de Rubik o Cubo Mágico se vendieron, y lea bien porque *no* hay error, ¡doscientos millones de cubos en tres años! Sí, doscientos millones de unidades en menos de tres años. ¡Tan aburrida no debe ser la matemática! Claro, tengo que hacer una observación importante: la mayoría de la gente *no relaciona* intentar *resolver* el cubo mágico con *hacer matemática*… Ese es *nuestro problema*: no saber (o no haber sabido) explicar lo que realmente *es* la matemática. La percepción actual es ciertamente equivocada, aunque creo que está cambiando, lentamente, pero está cambiando.

Si la búsqueda de belleza, elegancia y economía es lo que le resulta más convocante, los matemáticos tenemos un libro muy especial, *Proofs from THE BOOK* [11], en el cual solamente *se aceptan demostraciones que reúnan belleza, elegancia y economía de palabras.* Fue compilado en homenaje al matemático húngaro Paul Erdos, uno de los más prolíficos de la historia, quien hacía un culto de ese tipo de pruebas.

Y para terminar con esta suerte de *racconto*, el *gusto personal.* Esto es esencialmente intransferible: lo que me gusta a mí puede que a usted no, y viceversa. Mi compromiso es ofrecerle las llaves para que pueda entrar en este edificio maravilloso que ha construido el hombre a lo largo de los siglos. Con herramientas muy *elementales*, si las miramos desde el presente, fueron suficientemente poderosas para construir pirámides.

Justamente hoy, cuando ponemos personas en la Luna, viajamos alrededor del mundo en cuestión de horas, tenemos audífonos y

anteojos para mejorar la audición y la visión, observamos los saltos descomunales en la odontología, las resonancias magnéticas y tomografías computadas, la robótica y la nanotecnología, las anestesias (¿se imagina lo que habrán sido las intervenciones quirúrgicas 'sin anestesia'?), ahora, hacemos plomería en el corazón, diálisis, reemplazamos órganos, tenemos penicilina que nos resuelve lo que antes nos mataba, construimos puentes y túneles de varios kilómetros, rascacielos que superan los ciento cincuenta pisos, construimos nuevos materiales con propiedades impensadas hace un siglo, conseguimos energías que ya no dependen solamente del agua, del aire o del viento, comemos mejor, nos vestimos mejor, nos comunicamos mejor, vivimos mejor, nos educamos mejor y, sobre todo, nos entretenemos mejor

Por todo esto siempre me he resistido a aceptar esa suerte de frase hecha: 'Todo tiempo pasado fue mejor'.

No lo creo. El problema no reside allí: en comparación el pasado *en promedio* fue siempre peor que el presente, y ni que hablar del futuro. Pero lo que es *inaceptable* es que este presente sea bueno para *unos pocos* y *no lo sea* para todos… aún. Privilegiados como yo, mirando desde una posición como la mía, *seguro* que podemos afirmar que este presente es mejor. La deuda está en otro lado, en donde no hemos podido lograr aún que la distribución sea equitativa, igualitaria e inclusiva.

Dicho de otra forma, si *todos* estuvieran en el lugar que estoy yo, no tendríamos ninguna duda en mirar el pasado, con respeto y valoración de todas las escalas intermedias, pero entendiendo que *nunca antes estuvimos mejor que ahora*.

Recreativa o no, la matemática ha tenido una contribución que podría calificar como esencial, descomunal o imprescindible. Es muy difícil imaginar este presente sin el aporte de los 'gigantes' que nos precedieron, pero es decididamente imposible proponer *cualquier futuro* que no tenga a la reina de las ciencias en el centro de la escena.

Por eso me atrevo a afirmar que estamos 'muchísimo mejor'… sin ninguna duda.

3. Sobre este problema escribí en *Matemática… ¿estás ahí?*, vol. 1, p. 173, Siglo XXI Editores. Si no, puede encontrar los datos en www.pagina12.com.ar/diario/contratapa/13-75396-2006-10-31.html

4. Como siempre me dice Carlos D'Andrea, "los matemáticos no estamos

acostumbrados aún a las pruebas que se obtienen usando computadoras, y hasta que no consigamos 'incorporarlas' como parte de nuestro sistema de validación, seguiremos intentando ir por donde nos sentimos más seguros".

5. La historia sobre este problema está en *Matemática… ¿estás ahí?*, vol. 5, p. 75, Siglo XXI Editores. Si no, en este artículo: www.pagina12.com.ar/diario/suplementos/espectaculos/2-14202-2009-06-14.html

6. Sobre el Problema del Viajante de Comercio escribí en *Matemática… ¿estás ahí?*, vol. 2, p. 152, Siglo XXI Editores. Si no, también apareció en www.pagina12.com.ar/diario/contratapa/13-67031-2006-05-18.html

7. http://mathworld.wolfram.com/RhindPapyrus.html

8. *The Rhind Mathematical Papyrus: An Ancient Egyptian Text* es un libro de Gay Robins y Charles Shute, publicado en 1990, que presenta el texto completo. Allí aparece, en el lugar 79, el problema que involucra las casas, los gatos, etcétera.

9. Si le interesa verificar los datos, el resultado es que el ancho es 13 y el largo 14. Es la *única* forma de que, con números enteros, se verifican los datos pedidos en el problema.

10. De forma 'figurativa', claro está.

11. *Proofs from THE BOOK* (*Demostraciones de El Libro*), editado por Martin Aigner y Günter M. Ziegler, y publicado por la editorial Springer en 1998.

Jeroglíficos

El domingo 7 de agosto del año 2016, entré en un museo de Londres conocido como Somerset House. Caminé un buen rato, entretenido con la exhibición mundial de ilustraciones. Como sucede en la Argentina, en Gran Bretaña también hay una gran valoración por este campo, y la muestra de ese año era realmente espectacular. De todas formas, había 'algo' que me llamaba la atención. Reiteradamente veía símbolos que no entendía, algo así como 'jeroglíficos', pero no podía comprender lo que estaba… ¿escrito?

De pronto, encontré hojas impresas en papel de muy buena calidad: eran folletos. Tomé uno, lo abrí y, tal como esperaba, había una referencia. Se pedía allí que uno escribiera su propio nombre.

Ahora le voy a trasladar el problema a usted. Sí, a usted. Le voy a pedir que, en el transcurso de esta nota, escriba su nombre… pero *no* en castellano. Usted debe estar pensando: si no es en castellano, ¿en qué idioma se supone que lo voy a escribir? Bueno, téngame un poquito de paciencia.

Le saqué una foto a la parte que me interesaba, aquí la encontrará como figura 1. Dudé si traducirlo del inglés, pero llegué a la conclusión de que no hace falta. La pregunta entonces es: ¿cuál es el problema que hay que resolver?

Vea, parte del problema es deducir cuál es el problema que usted tendría que resolver (si tuviera ganas) y, por supuesto, después *resolverlo*. Esta es la foto.

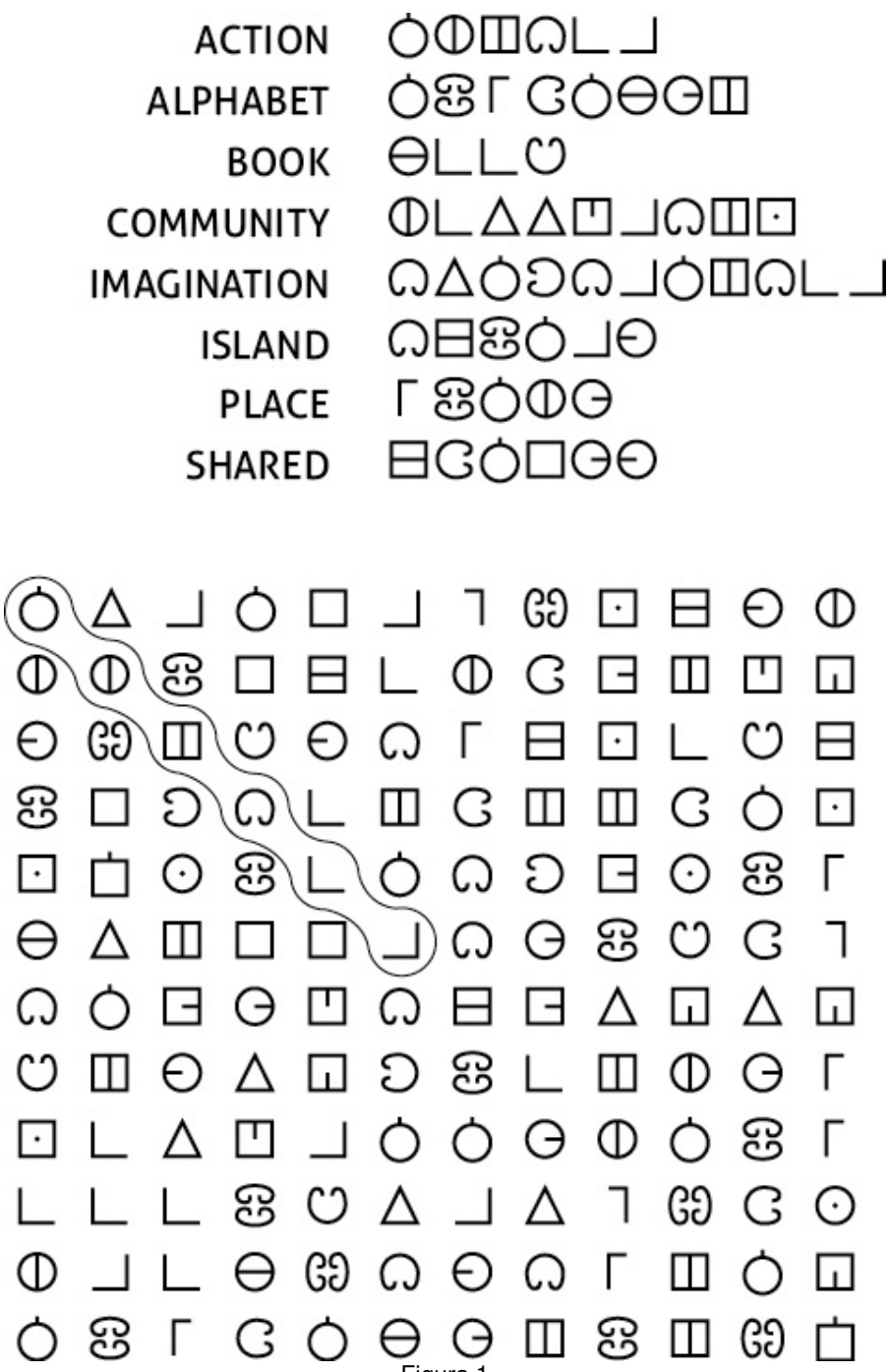


Figura 1

Solo se pide escribir su nombre, nada más. Ahora le toca a usted.

Solución

Como podrá observar, hay escritas unas palabras en inglés. En definitiva, que estén en inglés o en cualquier otro idioma no cambia nada. Lo que *sí* importa es que al lado de cada palabra hay una cantidad de símbolos. Por las dudas, si usted se *está 'traduciendo encima'*, lo voy a hacer yo, pero créame que no hace falta. Más aún: ni siquiera importa que sean palabras. Acá voy:

ACTION = ACCIÓN
ALPHABET = ALFABETO
BOOK = LIBRO
COMMUNITY = COMUNIDAD
IMAGINATION = IMAGINACIÓN
ISLAND = ISLA
PLACE = LUGAR
SHARED = COMPARTIDO

Al lado de cada palabra que aparece en la figura 1, hay un grupo de símbolos. Como el número de símbolos se corresponde con la cantidad de letras de cada palabra que está a la izquierda, uno puede conjeturar que cada símbolo representa una letra. Para corroborarlo, basta ver que cada vez que aparece una letra A (por ejemplo, en ACTION e IMAGINATION), el símbolo que está a la derecha se corresponde no solo con la letra sino también con la ubicación. Lo mismo sucede con todas las demás. Eso permite hacer una asociación entre letras y símbolos.

Entonces, uno descubre que hay una suerte de *nuevo alfabeto*… aunque no sé si está bien llamarlo *nuevo* alfabeto, más bien sería una nueva manera de representar cada letra con el 'dibujito' que nosotros hacemos. Entre paréntesis: nos hemos acostumbrado tanto a verlos que los que usamos habitualmente parecen naturales, y los que están a la derecha, *antinaturales* o *raros*. En realidad, no hay ninguna razón para privilegiar unos sobre otros. Cuando empezó todo esto de *escribir*, los que inventaron el alfabeto podrían haber elegido otros jeroglíficos para representar cada letra o sonido. Esto es fácil de descubrir si uno conoce los alfabetos que se usan en otros idiomas (griego o ruso, por citar un par de ejemplos, y ni hablar si usted puede escribir en hebreo o en árabe). Para variar, me desvié.

Ahora sí, ya puede hacer una 'tabla' con cada una de las letras para escribir su nombre con este nuevo alfabeto (figura 2). Con todo, hay una dificultad que no había advertido al principio: me doy cuenta de que si usted se llama Zulema o Lázaro, no podrá escribir su nombre,

ya que no está la letra ‘z’, ni la ‘f’, ‘j’, ‘q’, ‘v’, ‘w’ o la ‘x’… Habrá que concederles una licencia a quienes crearon este problema.

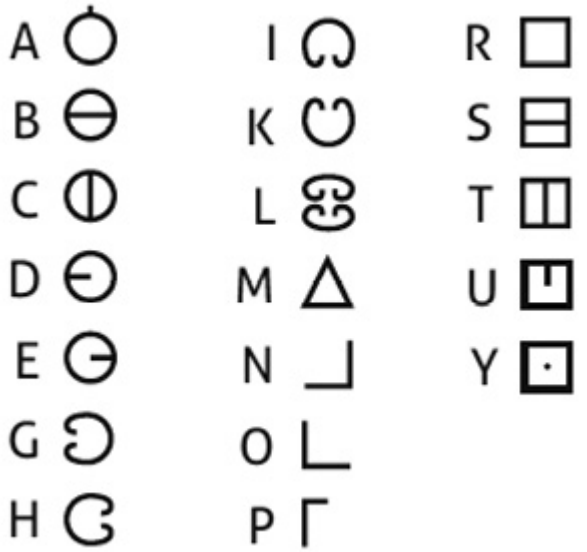


Figura 2

Pero hay algo más por hacer. Mirando la figura 1, sobre el ángulo superior izquierdo y en diagonal hacia la derecha (y hacia abajo), aparecen seis símbolos ‘englobados’, que se corresponden justamente con los que aparecen en la palabra ACTION. Esto ‘*invita*’ a que uno busque las otras siete palabras. Si bien no lo dice en ninguna parte, yo me fabriqué mis propias reglas, y las busqué distribuidas de forma horizontal, vertical o diagonal, en ambas direcciones y, además, de arriba hacia abajo o al revés. Como resultado, queda la figura 3, donde puse un número entre 1 y 8 en el *comienzo* de cada una de las palabras.

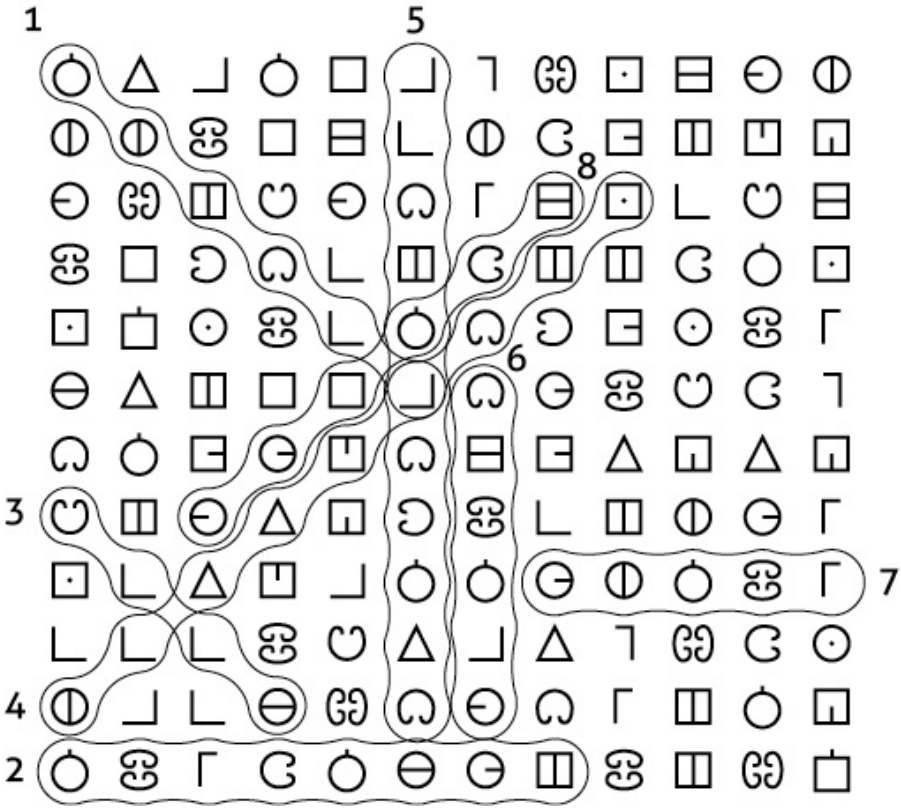


Figura 3

Y eso es todo por hoy. Las emisoras continúan con su programación habitual… ¡y este libro también!

AlphaGo

La historia que quiero contar es verdaderamente fascinante. En marzo del año 2016, pasó algo que no fue tapa de los diarios, no solo en nuestro país sino en virtualmente ningún lugar del mundo occidental. Lo que sucede en una buena parte del este asiático nos queda tan lejano desde el punto de vista geográfico y cultural que es como si lo ignoráramos. Peor aun: no es '*como*' si lo ignoráramos, lo ignoramos, lisa y llanamente. Es por eso que le propongo que lea la historia que sigue como una forma de introducirse en el tema y bucear por su propia cuenta para decidir hasta dónde quiere estar informada/o. Yo solamente voy a ser un mero intermediario, alguien que le va a contar una historia que no es ficción, sino real. Acá voy.

Seúl, capital de Corea del Sur. En el hotel Four Seasons, entre el 9 y 15 de marzo, se jugaron cinco partidas de Go (estoy casi seguro de que está pensando: ¿de qué?). De Go. ¿Qué es Go?

El Go se juega hace más de dos mil quinientos años. La leyenda indica que fue inventado por el mítico primer emperador chino con el objetivo de *educar e instruir a su hijo*. Se juega sobre un tablero, como el que se usa para jugar al ajedrez o las damas, solo que en lugar de 64 casillas (un tablero de 8×8), al Go se juega en un tablero de 19 líneas horizontales por 19 líneas verticales, con 361 intersecciones. Es uno de los juegos más populares en China, India, Japón, ambas Coreas, Indonesia, Pakistán… lugares que nos quedan muy lejos.

Se juega también con fichas blancas y negras que los dos participantes se turnan en ubicar en las intersecciones de la grilla, no en las casillas, como sucede en el ajedrez o las damas. Una vez que se ubican las piezas (que son todas iguales salvo por el color, como en las damas), no se mueven más. El objetivo es tratar de *rodear* las del rival. Logrado el objetivo, se consideran capturadas y se sacan del tablero. De esta forma, se generan *batallas* entre estas armadas '*blancas*' y '*negras*' que se disputan en distintas partes del tablero, y que se suelen propagar desde las cuatro esquinas hacia el centro.

Parece un juego ingenuo, sus reglas tan sencillas así lo sugieren. Sin embargo, es *muchísimo más difícil que el ajedrez*, por poner un ejemplo fácilmente comprensible para nosotros, aunque más no sea

por la cantidad de posiciones que pueden suceder durante una partida[12].

Ahora bien, ¿qué fue lo que pasó? El hombre ha intentado siempre diseñar programas que pudieran jugar no solo al Go, sino también al ajedrez o a las damas o al ta-te-ti. Las *damas* sucumbieron en el año 1994, pero el ajedrez ofreció un poco más de resistencia. En 1996, Garri Kaspárov (el campeón mundial indiscutido en ese momento) jugó seis partidas contra Deep Blue, un programa producido por ingenieros de IBM. Kaspárov ganó tres partidas, empataron dos y perdió una. Pero al año siguiente, en la revancha, todo cambió… y para siempre. No solo perdió 3½ a 2½, sino que Kaspárov advirtió como muy pocos que no solo *esa* batalla estaba perdida, sino que el hombre ya no podría nunca más contra las máquinas. Y así fue. Ningún hombre hoy, gran maestro o aficionado, puede jugar contra un programa con esperanzas de ganar de forma consistente, aun enfrentándose a programas no tan sofisticados. Las computadoras usan su velocidad para revisar sus bases de datos sobre millones de partidas jugadas y su capacidad de memoria para analizar potenciales movidas y evaluar cuál de ellas es la que tiene mayor probabilidad de ganar. A un humano eso le llevaría cientos de miles de siglos. Listo. Asunto concluido. Juguemos entre nosotros porque contra ellas ya no vamos a poder.

Sin embargo, a los humanos nos quedaba una posibilidad más, una *vida más: ¡el Go!* El Go presenta un grado de complejidad tan grande que los analistas del momento sospechaban que estábamos todavía a un siglo (sí, un siglo[13]) de poder afrontar con posibilidades un enfrentamiento máquina vs. hombre.

Aquí entra en escena Demis Hassabis, un joven inglés, que nació y vive en Londres y que está a punto de cumplir 40 años. Es neurocientífico, investigador en inteligencia artificial, programador de videojuegos y, además, muy buen ajedrecista. El Go se transformó en una suerte de obsesión, no por el juego en sí mismo sino porque, siendo un apasionado por producir avances en inteligencia artificial, tomó al Go como un desafío personal. Era algo así como el 'nuevo mundo a conquistar', el nuevo Everest por dominar.

En el año 2010, juntó a varios científicos especialistas en neurociencia, inteligencia artificial y programación y cofundó la empresa DeepMind[14]. Una vez dentro de la compañía, apareció AlphaGo, un programa *especialmente diseñado para jugar al Go*. Pero Hassabis y su equipo supieron desde el principio que lo que había hecho Deep Blue con Kaspárov no era el camino a seguir. Por más *fuerza bruta* que se usara, capacidad de memoria, almacenamiento de

enormes bases de datos, rapidez de búsqueda, etc., no sería suficiente. Había que buscar por otro lado, crear un programa que ¡aprendiera! Sí, una computadora que pudiera aprender ella sola, como si sacara conclusiones a medida que incorporara nuevas experiencias. Si me permite, es como decir que debía parecerse más a un comportamiento humano. Pero hay más.

Enterados de lo que estaba sucediendo con DeepMind y los progresos que producían con su programa, aparecieron dos personas que se interesaron… y mucho: Larry Page y Sergey Brin. Por las dudas, son los creadores y fundadores de Google. Viajaron a Londres en 2014 y le hicieron una oferta a Hassabis y su grupo: le comprarían la compañía con ellos adentro como socios, por 650 millones de dólares.

La respuesta fue afirmativa no solo por el dinero en juego (no despreciable, obviamente): a partir de ese momento *todo* lo que pudiera hacer AlphaGo tendría el respaldo de Google. En realidad, AlphaGo es de Google ahora y *toda la potencia, toda las computadoras, toda la capacidad de almacenamiento, todo… en fin, todo lo que se le ocurra*, está a disposición de Hassabis y su grupo.

Cuando AlphaGo tuvo sus primeras versiones listas, empezó a jugarles a los otros programas de Go disponibles. De hecho, jugó 500 partidas contra *todos* los otros; AlphaGo ganó 499. Y llegó octubre del año 2015. La idea fue contratar a Fan Hui, el campeón europeo de Go. Hui nació en China pero se naturalizó francés, y hoy, a los 34 años, es el director técnico del equipo profesional de Go que representa a Francia en las competencias internacionales. Hui *no es ni era* el mejor jugador en actividad, pero sí es un jugador profesional y en ese momento se ubicaba entre los mejores 650 del mundo. Teniendo en cuenta que más de una tercera parte del mundo juega al Go, es un logro *no menor*. Lo contrataron para que jugara cinco partidas contra AlphaGo y sucedió algo inesperado: por primera vez en la historia, AlphaGo (una computadora) le ganó una partida a un humano. En realidad, no solo le ganó *una partida*, le ganó las cinco. Todo esto tuvo un impacto muy fuerte en China, Corea, Japón…

Sucederían dos cosas más todavía. La primera tuvo lugar en enero de 2016. La revista *Nature*, una de las más importantes por prestigio y penetración en el mundo de la ciencia, publicó un artículo[15] sobre AlphaGo, lo que terminó ubicándolo en el mapa. Bueno, al menos en *ese* mapa, en donde vivimos los que estamos en *este lugar del mundo*.

Pero faltaría algo más: Lee Sedol.

Para usted, como lo era para mí hasta hace muy poquito tiempo, ese nombre no dice nada. Sedol es un joven de 33 años nacido en

Corea del Sur. En *otras partes del mundo*, Sedol es como Maradona o Messi o Federer o Tiger Woods. Es el campeón mundial de Go… desde hace ¡18 años! Todos los que trabajan en DeepMind y produjeron AlphaGo *necesitaban* jugarle al equivalente de Kaspárov hace veinte años. ¿Cómo? Justamente la gente de Google le hace una oferta: lo desafían a jugar cinco partidas, en donde él elija (eligió su ciudad, Seúl). Si él ganaba tres de las cinco, le pagarían un millón de dólares. Si perdía, podría elegir una obra de beneficencia cualquiera y Google depositaría/donaría ese millón de dólares allí.

Lee no contestó inmediatamente. Primero, según declaró, quería ver cómo y por qué había perdido Hui en octubre del año anterior. De todas formas, cuando se firmó el contrato dijo públicamente que él creía que podía jugar mucho mejor que el campeón europeo, y que su duda estaba en si ganaría 5 a 0 o 4 a 1.

Las cinco partidas se jugaron en el hotel Four Seasons de Seúl. En un salón especialmente acondicionado, los enfrentamientos tuvieron lugar el 9, 10, 12, 13 y 15 de marzo. A diferencia de lo que sucede con el ajedrez, en el cual cada jugador hace 40 movimientos en promedio, las partidas de Go son mucho más largas: superan las 200 movidas. Pero había algo más: hasta principios de este año, AlphaGo había jugado solamente una vez contra un jugador profesional. ¿Cómo les iría contra Sedol? Había llegado el momento de 'la verdad' para Hassabis y el grupo de veinte investigadores que habían sumado sus esfuerzos para intentar dar el 'salto de calidad' y entrar en la historia. En el sudeste asiático los diarios y los jugadores profesionales se manifestaban con muestras de sarcasmo y sugerían el ridículo que habría de hacer AlphaGo al enfrentarse con Lee. De hecho, la convicción era que sería la manera más fácil para Sedol de ganar un millón de dólares.

No tan rápido, muchachos…

De las cinco partidas, los organizadores le ofrecieron a Lee que jugara tres veces con negras[16], con lo cual pudo hacer la primera movida. Ni bien empezó la primera partida, Lee advirtió que estaba jugando contra un animal diferente del que había tenido Hui hacía algunos meses. Es que AlphaGo tiene la capacidad de dividirse en dos y jugar contra ella misma, y lo hace millones de veces por día e incorpora esos datos una y otra vez. Desde octubre de 2015 hasta marzo de 2016 habían pasado casi cinco meses. Si bien al Go se juega desde hace más de dos mil quinientos años, el hombre junta *toda la información que puede* y mejora en función de esa experiencia. Más aún: mientras yo escribo estas líneas y usted las lee, AlphaGo jugó millones de partidas sin que se le moviera un pelo. Y la *gran diferencia*

es que se acuerda de todo y en el camino, esto es lo increíble, *¡aprende!*

Esa primera partida, la del 9 de marzo, terminó de forma inesperada para el mundo. Lee perdió después de 188 movimientos. Con el rostro mortificado, Lee pidió disculpas… sí, disculpas. Cuando le preguntaron qué pronóstico tenía para el día siguiente, su respuesta fue muy diferente de la del día en que se firmó el contrato: "50 y 50". Si bien la máquina sorprendió a Lee (y al resto de los expertos por lo que hizo en la movida 102 de esa primera partida), todavía habría más.

El jueves 10 de marzo, ahora con piezas blancas, Lee estaba dispuesto a dar batalla, pero algo curioso sucedió en el camino. Cuando AlphaGo hizo su movida 37, Lee quedó *petrificado*. Las cámaras lo mostraron con la frente transpirada. Se levantó y salió de la sala. Cada jugador tiene dos horas para hacer todos sus movimientos y, por lo tanto, cada minuto tiene un peso específico que nadie ignora. Lee volvió después de un cuarto de hora y jugó la mejor partida de su vida (según él mismo), pero… ¡volvió a perder! Esa movida 37 representa un *quiebre en la historia* para los que juegan al Go. Nunca nadie había jugado así. La probabilidad de que alguien haga esa movida está estimada en 1 en 10.000. De hecho, el presidente de la Asociación Norteamericana de Go, Andrew Jackson, declaró que si alguno de sus maestros hubiera visto que él hacía esa movida, le habrían dado una palmada en la muñeca diciéndole: "Eso no se hace". Bueno, uno debería agregar: ¡no se hacía! Ahora sí se hace. Más aún, ¡esas movidas le sirvieron para ganar! Lee aceptó la derrota después de 211 movimientos.

Allí está lo extraordinario del relato. Lee había jugado la mejor partida de su vida y, a pesar de haberle alcanzado, comentó que ese día había aprendido lo que nunca antes había visto. Y de eso se trata.

Dos días más tarde, el sábado 12, se jugó la tercera partida. Ahora Lee necesitaría ganar las siguientes tres si quería aspirar al millón de dólares, pero ni siquiera eso era lo importante. Lee volvió a perder y, cuando declaró que sentía que había fallado, pareció pedir disculpas por lo 'mal que nos ha representado'. Sin embargo, y como era esperable, Lee no perdió contra una máquina ni una computadora. Lee Sedol acababa de perder contra un grupo de veinte personas que juntaron sus mentes para diseñar un programa que pudiera contra el mejor que podemos exhibir nosotros hoy. AlphaGo somos todos nosotros. AlphaGo no llegó desde un universo desconocido en una suerte de ovni y nos ganó a un juego que inventamos nosotros. Una vez más, AlphaGo somos todos nosotros.

Gu Li, uno de los dos amigos íntimos de Sedol y también importante jugador profesional, contratado por la televisión nacional de China, opinó esa noche: “Lee estuvo jugando una batalla solitaria contra un rival invisible”.

Ya no habría un millón de dólares para Lee pero sí hubo más partidas. Al día siguiente, el domingo 13 de marzo, Lee jugó con blancas. Curiosamente, AlphaGo cometió un error a poco de comenzar la partida y Lee no lo dejó pasar: en la jugada 78 hace una jugada ingeniosa y creativa, que también tenía una probabilidad de 1 en 10.000 de ser utilizada. Pero a diferencia de lo que había pasado antes, AlphaGo se entrega. El resultado estaba 3 a 1 ahora. Ya no sería como con Hui.

Lee pidió jugar la quinta partida con piezas negras, porque su único triunfo se había producido con blancas, y ganar el último partido con negras tendrías más valor. Obviamente, se le concedió el pedido. Pero ya no hay mucho más por hacer. Esta vez no hubo error de AlphaGo y toda la sabiduría y creatividad de Lee no alcanzaron. Final: AlphaGo 4 - Lee Sedol 1.

El futuro

Esto recién comienza. Sería inapropiado tratar de sacar conclusiones cuando en el futuro está *todo* y el pasado nos permitió llegar hasta acá. Cuando Deep Blue le ganó a Kaspárov, la máquina que había diseñado IBM virtualmente desapareció de la escena. No hubo posibilidades de extrapolar para ninguna otra cosa lo que obviamente sirvió (y sirve) para ganar al ajedrez. Es decir, no hubo manera de aprovechar (salvo en cosas menores) la potencia de lo que había sucedido. Ahora, con AlphaGo es diferente.

Tanto Brin como Page dijeron después del triunfo: “Está claro que no invertimos 650 millones de dólares para ganar al Go. Ese no es el objetivo de Google”. No, claro que no. La expectativa es que este tipo de programas, en los cuales las máquinas aprenden y se van mejorando, sirvan además para mejorarnos a nosotros. El campeón europeo, Fan Hui, estaba ubicado entre los mejores 650 jugadores del mundo. Hoy ya está entre los mejores 300, después de haber jugado contra AlphaGo. Por otro lado, las movidas que hizo en su enfrentamiento con Lee Sedol abrieron un universo de posibilidades que los humanos no sabíamos que existían. Para decirlo de otra forma: en los programas anteriores, las computadoras tienen *predeterminado* qué hacer en cada caso. AlphaGo aprende mientras juega… y en el camino, nos enseña a nosotros. De hecho, AlphaGo no habría podido

demostrar toda su potencia de no haber sido porque Lee Sedol la empujó hacia ese lugar y la desafió.

La inteligencia artificial no será replicar la 'inteligencia del hombre', su *creatividad*. Es decir, los aviones vuelan pero no tienen alas que se muevan, ni plumas ni músculos. El hombre replicó lo que necesitó para obtener el mismo resultado. Ernest Davis, profesor en la Universidad de New York, acaba de escribir: "Usualmente, uno le dice a una computadora lo que *tiene* que hacer. En cambio, cuando hablamos de 'aprender', uno le muestra cómo. Me explico. Suponga que usted quiere que una computadora cruce una calle, por ejemplo. Con la programación convencional usted le da un conjunto muy preciso de reglas, diciéndole que tiene que mirar para la derecha, para la izquierda, esperar los autos, usar las 'cebras' para cruzar, etc., y después dejarla que lo haga sola. En cambio, con 'el aprendizaje' del que yo le estoy hablando, uno le muestra 10.000 videos de alguien cruzando una calle de forma correcta y otros 10.000 videos de alguien que al intentar cruzar *mal* es atropellado por un auto, y después la deja a ella sola para que aprenda. ¡Y aprende!".

Como decía al principio, estamos en presencia de algo nuevo, al menos, algo nuevo para mí. El hombre acaba de cruzar una barrera que algunos ni siquiera pensábamos que se podía abordar. Un enorme potencial se acaba de abrir, con todas las implicancias éticas y de *tremendo poder* para quien posea esta tecnología.

Algunos países más 'periféricos' (por la posición geográfica) como la Argentina, por poner un ejemplo, se sitúan en un lugar de privilegio en estos temas. Esto se debe a múltiples factores, por supuesto, pero en principio, la masa crítica de personas interesadas, el desarrollo de programas en las distintas universidades nacionales que se ocupan de absorberlos, contenerlos y educarlos, la probada creatividad exhibida por los alumnos, las increíbles iniciativas personales y el éxito que ya han logrado hasta acá, ponen al país en una situación de envidia para sus vecinos de la región.

Como sucede siempre, mantener el nivel (y aumentarlo, ya que está claro que entre otros rumbos, el *mundo* avanza en ese sentido) requiere de inversión y fondos que protejan ese desarrollo. Justamente allí está la clave que diferencia 'soberanía' de 'dependencia'. O lo produce el país (y después de cumplir y cubrir las necesidades internas le servirá eventualmente para exportar) o lo tendrá que comprar hecho, y dependerá de que nos lo quieran vender. En fin, me desvié, pero creo que se entiende lo que pienso.

12. Las del ajedrez se estiman en 10^{123}, mientras que en el Go llegan a 10^{360}. Es imposible (al menos para mí) dar un ejemplo que permita imaginar la magnitud de estos números. Mejor dicho, sí: el número de átomos del universo (visible) se calcula en 10^{80}. El ajedrez llegaría a una vez y media a ese número. El Go sería cuatro veces y media. No sé: creo que a esta altura esos números no dicen más nada, ¿no es así?

13. "Puede que pasen cien años [*sic*] hasta que una computadora pueda derrotar a los humanos jugando al Go… o quizás más", declaró en ese momento Piet Hut, astrofísico del Instituto de Estudios Avanzados en Princeton. Puede consultar el artículo publicado en el *New York Times* del 4 de abril de 2016, firmado por el periodista especializado en ciencia George Johnson: www.nytimes.com/2016/04/05/science/google-alphago-artificial-intelligence.html?_r=0

14. DeepMind = mente profunda.

15. www.nature.com/nature/journal/v529/n7587/full/nature16961.html

16. En el Go, a diferencia del ajedrez o las damas, quien juega con piezas negras hace la primera movida.

Libratus

El duelo fue anunciado con mucha anticipación. Eso sí: tenía el atractivo de toda revancha o desquite. La primera vez se habían enfrentado en julio de 2015, en el mismo lugar: el Rivers Casino de Pittsburgh. ¿Pittsburgh? ¿Por qué habrían de medirse en una ciudad con tanto frío (en esa época del año en el hemisferio norte)? Si bien Pittsburgh es, detrás de Filadelfia, la segunda ciudad en importancia de Pennsylvania, tiene que haber alguna razón de mucho peso para que se desarrollara en un lugar así. Curiosamente, como en la primera oportunidad, no hubo promoción ni difusión, no se vendieron entradas anticipadas ni se discutieron los derechos de televisación. No hubo gente haciendo cola y las redes sociales ignoraron el evento por completo. ¿Entonces?

Creo que está claro, a esta altura, que cualquier acontecimiento que no se vea por TV o que no tenga repercusión en las redes sociales… ¡no existe! Podría decir, con poco margen de error, que es porque ¡no le interesa a nadie! No se apure, no vaya tan rápido. Espéreme un poquito. Después de leer lo que sigue, volvemos juntos para atrás y repensamos la respuesta.

En principio, el cartel que figuraba en la marquesina decía lo siguiente:

Brain vs. Artificial Intelligence: Upping the Ante
Jan 11-20, 2017
Rivers Casino, Pittsburgh, PA

Es decir, el *Cerebro* enfrentando a la *Inteligencia Artificial*, con un agregado: *Subiendo la Apuesta*. Me imagino un diálogo entre usted y yo:

—Adrián, ¿otra vez con lo mismo?

—Sí, otra vez con lo mismo.

—¿Y ahora? ¿Qué pasa ahora? O mejor dicho, ¿qué *pasó* ahora?

—Téngame un poquito de paciencia y le cuento.

—¿Otra vez 'la máquina' compitiendo con los humanos en algún juego?

—Y sí, de nuevo…

—Pero ¿no era que ya se sabía cómo ganar *siempre* a las damas, al ajedrez, al Go? ¿Qué juego queda?

Acompáñeme por acá. Quiero resumirle una historia.

- En 1997, *Deep Blue*, un programa diseñado por IBM, le gana —finalmente— al mejor jugador de ajedrez y campeón del mundo en ese momento: Garry Kaspárov.
- En 2007, Jonathan Schaeffer[17], profesor de la Universidad de Edmonton, en Alberta, Canadá, diseña su programa *Chinook* y publica su trabajo seminal: “El fin de las damas”.
- En 2011, *Watson*, un programa también diseñado por IBM, les gana a Ken Jennings y Brad Ruttner, los dos campeones del mundo de *Jeopardy!* (un juego al que nosotros no jugamos en nuestro país pero, si le interesa, le sugiero que lo googlee).
- Finalmente, en 2016, en su laboratorio *DeepMind*, Google diseña su programa AlphaGo[18] que le gana al campeón del mundo en ese momento (y actual), Lee Sedol.

A partir de esos momentos particulares, los humanos, a través de nuestros representantes, podemos decir que dominamos cualquiera de esos juegos. Sabemos ahora qué estrategias elaborar para *ganar siempre* o, si usted prefiere (y sería más correcto), *no perder nunca*. En realidad, si quisiera ser riguroso debería decir que eso es cierto para todos los juegos. Y en el caso del Go, AlphaGo no conoce (¡aún!) la jugada perfecta para toda situación… pero con lo que hace, la probabilidad de que un humano gane una partida es cada vez más pequeña.

Ahora apareció algo distinto. Tuomas Sandholm y Noam Brown son —respectivamente— profesor y alumno de doctorado en el Departamento de Computación de la Universidad de Carnegie Mellon, en Pennsylvania, Estados Unidos. Ellos diseñaron un programa (que llamaron *Libratus*), para que juegue al poker. Para ser más precisos, es una *variante del poker*[19]. No hace falta saber nada sobre él: de hecho, si usted no sabe jugar, sepa que yo tampoco. Este artículo no es para ilustrar sobre el juego, sino para exhibir algo extraordinario que acaba de suceder.

En todos los juegos de los que hablé antes, los rivales tienen *toda* la información a la vista. Como se juegan sobre un tablero, los dos jugadores ven las piezas del rival y saben en qué lugar están ubicadas. No hay nada escondido. Pero acá es donde se produjo un salto fundamental. Cuando uno juega a las cartas, no importa que sea al poker o al juego que usted elija, hay información del rival que uno no

tiene, hay cartas que uno *no ve*. Y lo mismo sucede al revés. Esto se presta para que hagamos lo que se llama un *'bluff'*, es decir, que yo quiera que usted 'crea' que yo tengo ciertas cartas que en realidad no tengo, y viceversa. Si quiere ignorar al poker, pase al truco: yo puedo 'gritarle' envido o truco y usted no sabe si yo tengo buenas cartas o no. Eso forma parte del juego, claramente. Lo mismo con el poker. Es por eso que ahora la computadora, o mejor dicho *Libratus*, tiene que *intuir* por qué usted hace lo que hace, y decidir si usted está tratando de engañarla (o no).

Estos juegos se llaman 'de información *incompleta* o *imperfecta*'. 'Esa' es la gran diferencia. No están *todas* las cartas (o fichas) arriba de la mesa. La computadora, como usted, *no ve todas las armas que tiene el rival*. Elaborar estrategias en esas condiciones es claramente mucho más difícil que jugar cuando todo el arsenal está expuesto y usted puede contar no solo cuántos 'soldaditos' tiene el rival, sino que además puede visualizar dónde están ubicados.

La *gran novedad* es que, esa semana, los humanos *perdimos* contra la computadora, perdimos contra el programa de Sandholm y Brown, perdimos contra *Libratus*. ¿Quiénes perdieron? ¿Cómo perdieron? Ya verá, téngame un poco más de paciencia.

Libratus no solo descubrió cuando los humanos la quisieron engañar, sino que utilizó la potencia de su estrategia… ¡para engañar a los humanos, para confundirlos! En el camino, derrotó por una abrumadora diferencia a los cuatro mejores jugadores de poker del mundo. ¿No merece prestarle un poco de atención al episodio?

En agosto de 2015, en el primer desafío entre el 'Cerebro' y la 'Inteligencia Artificial', los cuatro jugadores que participaron le ganaron al programa *Claudico*[20] que habían diseñado también Sandholm y Brown. El encuentro se hizo en Pittsburgh, en el mismo casino. Para Brown, el resultado fue técnicamente un *empate*, pero los jugadores sintieron que "habían ganado". Ahora ya no importa, es historia.

Durante veinte días, del 11 al 30 de enero de este año, esos cuatro jugadores (Jason Les, Jimmy Chou, Daniel McAuley y Dong Kim) se enfrentaron contra el nuevo programa de Sandholm y Brown: *Libratus*. Pero no lo hicieron de cualquier manera, sino con esta estructura.

Jugaron *diez horas por día*. Todo ese tiempo miraron las pantallas gigantes de múltiples televisores. No jugaron por *dinero real*, pero sí contabilizaron el dinero que iría ganando cada uno (cada humano) si estuviera jugando en una mesa de poker real.

Al finalizar la competencia, los humanos se habrían de repartir 200.000 dólares entre ellos, de forma proporcional a los resultados

que obtuvieron en sus partidas contra *Libratus*. En total jugaron 120.000 manos… sí, leyó bien: ¡120.000!

Ahora, preste atención a un dato extraordinario. Quizás usted está pensando en un detalle no menor: ¿cómo interviene la *suerte*? Es decir, cuando se juega al ajedrez o a las damas o al Go, las piezas empiezan siempre en la misma posición. No sucede lo mismo en los juegos de cartas. ¿Qué pasa si usted (o yo) recibimos *mejores* cartas? ¿Cómo interviene *este particular* factor?

Para resolver esa dificultad, hicieron lo siguiente: separaron a los cuatro humanos en dos equipos de dos personas. Un par jugó contra *Libratus* en una habitación sin contacto con el exterior, no podían usar sus teléfonos… nada.

El otro equipo se enfrentó contra *Libratus* en una habitación abierta para que pudieran seguir los partidos todas las personas interesadas. Pero lo notable es que decidieron darles *las mismas cartas* a ambos equipos, pero cambiadas. Es decir: las cartas con las que los humanos jugaban dentro de la habitación privada correspondían a las cartas que *Libratus* tenía para jugar en la habitación abierta al público; y al revés: las cartas que tenía *Libratus* en la habitación privada eran las de los humanos en la habitación pública. De esa forma, humanos y computadora tenían *¡las mismas posibilidades!*

Por supuesto, lo notable es que, aun así, la computadora ganó por escándalo. De hecho, haciendo las cuentas finales, *Libratus* se impuso en 15 de los 20 días que jugaron.

Al terminar cada jornada, después de *diez horas* de competencia, los cuatro jugadores se juntaban en el hotel e intercambiaban las notas sobre qué había hecho *Libratus* en cada una de las manos que cada uno de ellos había jugado. Después, una obviedad: cenaban y se iban a dormir.

Por supuesto, la máquina no necesitaba dormir nada. Es más: mientras ellos comían, conversaban y descansaban, *Libratus* seguía jugando contra sí mismo y tratando de resolver los problemas que esos mismos humanos le habían planteado durante el día, ya que, como jugadores excepcionales que son, para enfrentarla elaboraban estrategias que los programadores no habían contemplado.

Acá apareció una diferencia más: en todos los casos anteriores (ajedrez, damas, Go), los programadores intentaron explotar las debilidades de los humanos, si es que las descubrían. En este caso, la estrategia fue al revés. *Libratus* aprovechaba lo que aprendía ¡de lo que los humanos le enseñaban durante las diez horas del día! Es decir, cuando Les, Chou, McAuley y Kim encontraban alguna flaqueza y comenzaban a explotarla, a la noche, la computadora resolvía esos

agujeros o *errores*. De hecho, Sandholm dijo que elegían los *tres* problemas más serios que habían descubierto los humanos y un meta-algoritmo intentaba resolverlos durante la noche. El cambio era evidente: en lugar de detectar y luego explotar las debilidades de los rivales (los humanos), *Libratus* aprendía durante el día cuáles eran las debilidades propias y las corregía durante la noche.

Pero hay más… y esta *también* es una diferencia extraordinaria. En marzo de 2016, cuando AlphaGo le ganó al campeón del mundo Lee Sedol y finalmente el hombre aprendió cómo dominar el juego (el Go), la máquina jugaba contra sí misma pero, en su base de datos, los humanos la alimentaron con *¡todas las partidas de Go que se habían jugado en la historia hasta ese momento de las cuales hay un registro público!*

En cambio, a *Libratus* no le mostraron *ninguna partida de poker que se hubiera jugado antes. ¡Ninguna!* Solo le dijeron cuáles eran las reglas del juego y empezó a jugar ¡solo! (o *sola*, como prefiera) desde el principio. Aprendió por su cuenta. Por supuesto, cometió *todos los errores de un principiante*, pero *aprendió*. Y resulta que ahora juega mejor que cualquiera de los cuatro mejores representantes que tenemos los humanos, sencillamente porque es capaz de elaborar *mejores estrategias que las que nosotros podemos producir en el mismo tiempo*.

En el camino hizo algo imposible para nosotros: jugó billones de partidos (billón es un uno seguido de *doce* ceros) sin haber visto una partida 'en serio' en donde *Libratus* no participaba. Se fue refinando hasta descubrir qué es lo que más le convenía hacer para ganar más dinero: si apostar o retirarse.

Cuando terminó la competencia, Jason Les dijo: "Ha sido una experiencia muy frustrante porque daba la sensación de que *Libratus* ¡nos veía las cartas! No se puede jugar *tan bien* con tanta consistencia. Nosotros no estamos acostumbrados a perder, pero experimentamos situaciones que nunca habíamos vivido. La computadora juega de una manera imprevisible para nosotros. Sus estrategias nos confundían. Cada vez que alguno de nosotros creyó que había detectado alguna debilidad, inexorablemente resultó ser un espejismo. Al día siguiente, nos pulverizaba si intentábamos ir por ese camino".

Las partidas se hicieron en Pittsburgh, con o sin frío, porque tanto Sandholm como Brown trabajan en Carnegie Mellon y la supercomputadora que usaron está a 15 minutos del casino en el que se realizó la competencia.

Justamente, el director del Departamento de Computación de la universidad, Frank Pfenning, elaboró un comunicado que publicó

oficialmente la institución. Allí se pretende resaltar la importancia del hecho conseguido y por qué *sí* importa, o nos debiera importar, lo que hizo *Libratus*.

No mencionó lo que significa esto para la propia industria del juego, pero sí lo que representará en términos de elaboración de estrategias militares o de prevención de ciberataques, y también en relación con los diseños de nuevos tratamientos en medicina. "La computadora no puede ganar al *poker* si no puede hacer 'bluff'. Imagine que en algún momento su teléfono inteligente pueda negociar el precio de su nuevo auto mejor que usted. Esto es solo el principio".

Sí, es nada más que el principio y vale la pena estar informado de lo que está sucediendo en el mundo. La ciencia no tiene moral. Solo un ejemplo: la energía atómica se puede emplear para reemplazar los recursos naturales que utilizamos hoy y que se agotarán inexorablemente, o para construir la bomba atómica. Pero el progreso de la ciencia y la tecnología es inexorable también. Por ahora, ningún teléfono inteligente tiene la potencia de la supercomputadora de Carnegie Mellon.[21] Es solo cuestión de tener paciencia para que el teléfono celular ya no se llame más teléfono inteligente pero sí tenga la potencia de la supercomputadora de Carnegie Mellon. Pero claro, en ese momento, las supercomputadoras… (siga usted con la idea).

Esto es nada más que el principio. Pero ¿el principio de qué?

Continuará…

Datos salpicados

1. En esta variante de poker, solo se enfrentan dos rivales. En este caso, fue alguno de los humanos que le jugaba *mano a mano* a *Libratus*.
2. En enero de 2017, jugaron Jason Les, Jimmy Chou, Daniel McAuley y Dong Kim. En agosto de 2015 también habían participado Les y Kim, pero los otros dos fueron Doug Polk (el campeón del mundo en ese momento) y Bjorn Li.
3. El programa que enfrentaron en 2015 se llamaba *Claudico* y también lo produjeron Sandholm y Brown.
4. Tanto Brown como Sandholm dijeron que la diferencia que lograron los humanos no había sido significativa, que debió haberse considerado un empate (técnicamente). Por supuesto los jugadores *negaron* lo que dijeron los científicos.
5. En 2017 se jugaron 120.000 'manos'. En 2015, 'solo' se habían jugado 80.000.
6. Los RESULTADOS fueron:

a. Jason Les perdió 880.087 dólares.
b. Jimmy Chou perdió 522.857 dólares
c. Daniel McAuley (de Escocia) perdió 277.657 dólares.
d. Dong Kim fue quien jugó mejor, aunque igual perdió 85.649 dólares en veinte días. Se entiende que no es *dinero en efectivo* sino *en fichas*. No hubo dinero en juego, salvo los 200.000 dólares que se repartieron entre los cuatro.

7. La complejidad del juego es *enorme*. Son 10^{160} conjuntos de información, es decir, un uno seguido de ciento sesenta ceros (hay más conjuntos de este tipo que átomos en el universo).
8. El Centro de Supercomputación que está en Pittsburgh se llama Bridges y es uno de los más importantes del mundo. *Libratus* utilizó 600 de los 846 nodos del total que tiene Bridges.
9. La velocidad de Bridges es de 1.35 petaflops, algo así como 7.250 veces más rápida que la laptop más rápida que se fabrica hoy. La memoria de Bridges está en el orden de los 275 terabytes, que representa algo equivalente a la capacidad de memoria de más de 17.500 de las mismas laptops que consideramos antes.
10. Para quienes entiendan (y les interese) un poco más la parte técnica, *Libratus* necesitó usar 19 millones de 'core-hours' de cálculo y acceso a una base de datos de 2.600 terabytes de información.
11. Unos días más tarde, Sandholm aprovechó el foro que le ofreció el congreso que hizo en San Francisco (California) la Asociación para el Avance de la Inteligencia Artificial. Allí, él y su alumno compartieron todo lo que descubrieron en el desarrollo y competencia sobre el poker.
12. Cuando terminó la competencia, Brown dijo: "Esto cambia los preconceptos que existen entre la inteligencia de la máquina y la humana. La percepción de la gente es que el poker es un juego muy humano, y que la computadora no puede hacer 'bluff'. Bueno, esta idea está totalmente equivocada. No se trata de leer la mente de tu rival y tratar de deducir que están mintiendo. Se trata de saber usar las probabilidades cuando uno mira las cartas que le tocaron".
13. Una sugerencia: si usted juega al poker por internet, *tenga cuidado*, porque si cree que está jugando contra otro(s) humano(s), quizás sea alguna versión de *Libratus*. Por ahora, es difícil que suceda, pero no imposible, y ni hablar en el futuro *no tan mediato*.

14. Por último, el trabajo de Sandholm y Brown se puede leer en www.cs.cmu.edu/~sandholm/safeAndNested.aaa17WS.pdf

17. www.pagina12.com.ar/diario/contratapa/13-164965-2011-03-27.html

18. www.pagina12.com.ar/diario/sociedad/3-303267-2016-07-03.html

19. Una variante que se conoce con el nombre de “Heads Up No Limit Texas Hold Them” (que sinceramente no puedo ni sé traducir, pero aceptemos que es una *variante del poker tradicional*) y es la que más se juega hoy en el mundo. En todo caso, las *reglas* del poker, para saber quién gana en cada ‘mano’, son siempre las mismas. Eso no cambia.

20. Al leer el nombre *Claudico*, pensé que los autores no sabrían el significado de esa palabra en español. Cuando planeaba incluir mi sorpresa en esta nota al pie, Juan Sabia se apuró en corregirme y educarme: “Adrián, la palabra *claudico*, en latín, significa ‘rengueo’, que en el poker es algo así como ‘apostar’ lo mínimo indispensable para poder seguir jugando”.

21. Cuando Manuel Sadosky trajo *Clementina* a Exactas, UBA, para tener la potencia que hoy tenemos en un reloj que usamos en la muñeca hubo que ocupar una habitación entera y múltiples horas de *picar* tarjetas físicas para poder *programar*. Hoy el recuerdo de Clementina despierta una sonrisa tierna.

Anonimato

Lea esta historia con cuidado porque, aunque no sea usted la víctima, podría tocarle (si es que no le ha tocado ya y no lo advirtió) en un futuro muy cercano. Me explico.

Es posible que tenga un teléfono celular o una laptop o una computadora de escritorio. Es también posible que cuente con acceso a internet y, desde hace un tiempo, la tecnología le haya cambiado la vida. De hecho, ahora se puede comprar sin salir de la casa, sin siquiera haber 'tocado' la mercadería que se elige, pagar servicios, impuestos y pasajes, estudiar, investigar, aprender… El correo postal se usa *solamente para lo imprescindible*. Hoy por hoy: ¿quién escribe una carta? Es posible hablar por teléfono 'viéndose' mutuamente con la otra persona, enviar mensajes de texto, fotos, a través de Facebook, Twitter, Instagram, WhatsApp, Skype, etc., etc., *etc.* Creo que la idea está clara.

Pasaron más de 200.000 años para que la población mundial llegara desde cero a mil millones, pero alcanzaron 200 para que superáramos los siete mil (millones). Los primeros teléfonos aparecieron sobre el final del siglo XIX, las radios a transistores empezaron a producirse en 1947, pero se popularizaron entre 1960 y 1970 cuando ya había hecho su ingreso la televisión. Como usted advierte, los 'saltos cualitativos y revolucionarios' se produjeron, sí, pero con varias décadas en el medio.

¿Adónde quiero llegar? Téngame un poquitito más de paciencia. Una pregunta: ¿es *gratis* todo esto? Es decir, me doy cuenta de que la respuesta *obvia* es que no, que *gratis* no es… pero si uno analiza la cantidad de tiempo que ahorra, más la facilidad y celeridad en el acceso a la información (para los privilegiados como yo, sin ninguna duda), uno supondría que la cuota mensual a pagar tendría que ser abrumadora y/o prohibitiva. Sin embargo, aun teniendo en cuenta las diferencias en los potenciales planes y velocidades de transferencia de datos, hay *algo* que no cierra. Por ejemplo, ¿dónde está el negocio de Google? ¿Cómo es posible que uno pueda contestarse preguntas que ni siquiera se hizo ni sabía que eran posibles de formular, y todo en un milisegundo? ¿Qué ganan empresas como Facebook, Instagram (por

poner algunos ejemplos)? ¿Cómo puede ser que uno no tenga que *pagar nada* para abrir una cuenta de correo electrónico en Hotmail o Gmail o el proveedor que más le convenga? ¿Cuál es el *negocio*? ¿Desde cuándo en el mundo capitalista *alguien regala algo*?

Ahora sí, la historia que le prometí al principio.

Target es el nombre de una de las cadenas de supermercados más grandes de los Estados Unidos y del mundo. Al día de hoy[22], tiene 1.803 sucursales. Su base está en Minneapolis pero también opera en la India. En algún sentido, es la gran competidora de Walmart, una supercadena que también está en la Argentina.

Una tarde cualquiera, un hombre que vivía en las afueras de Minneapolis entró visiblemente enfurecido en la sucursal de Target que tenía más cerca. En la mano derecha sostenía varios papeles que parecían recién impresos, y pidió o, mejor dicho, *demandó* hablar con el gerente del local.

Pocos minutos después, ya en una oficina, desparramó los papeles que había traído: eran cupones con descuentos que Target le había enviado a la cuenta de correo electrónico de la hija: "¿Están locos ustedes? ¡Mi hija tiene 14 años! ¡Recién empezó el colegio secundario y ustedes le envían cupones con descuentos para ropa de bebé, pañales y cunitas! ¿Qué es lo que quieren: estimularla para que quede embarazada?".

El gerente le pidió los cupones, los revisó y consultó con el departamento que Target tiene destinado a las promociones. Quería asegurarse de que ese correo hubiera sido enviado por la empresa. Y sí. Después de esperar unos minutos, la voz del otro lado del teléfono le confirmó lo que le había dicho el señor que tenía adelante.

El gerente pidió disculpas de todas las formas imaginables y pensó que todo terminaba allí… *Pero no*.

Estimulado por un superior que comprendió la promoción negativa que podía tener Target si el episodio tomaba estado público, llamaron a la casa del padre de la joven con la idea de *reiterar* y *enfatizar* las disculpas. De paso, el llamado serviría para garantizar que la empresa tomaría el ejemplo para no incurrir en futuros errores.

El padre escuchó unos instantes y con un tono de voz sombrío dijo: "Vea. Tuve una conversación con mi hija y después de una larga charla es evidente que en mi casa se produjeron algunas actividades de las que yo no tenía idea. El bebé nacerá en agosto. El que tiene que pedirles disculpas soy yo".

Aquí, una pausa. No sé si usted se imaginó desde el comienzo que la historia apuntaba en esa dirección. No importa. En todo caso, lo que *sí* importa es que Target —que es *solamente un ejemplo*— supo

antes que los padres que la niña estaba embarazada. La compañía, a través de su sector de Analytics[23], le asigna a cada mujer un 'índice de potencial embarazo', y lo hace recopilando la información sobre sus patrones de compra.

De acuerdo con lo que se hizo público, la empresa pudo detectar que una gran mayoría de las mujeres que incrementan fuertemente la cantidad de loción *sin perfume* que compran terminan teniendo un bebé seis meses después.

Más aún: esas mismas mujeres aumentan —habitualmente— la ingesta de suplementos medicinales con *magnesio, zinc y calcio*, datos que a Target le sirven para *aumentar fuertemente la probabilidad de embarazo*. A partir de ese momento, como las consideran muy buenas candidatas a tener un bebé en un futuro cercano, y con la idea de capturarlas como clientes, comienzan a enviarles cupones con descuentos sobre determinados productos relacionados con el tema.

Creo que no hace falta que siga con el ejemplo. Lo extraordinario (o increíble) es que el algoritmo ¡no había fallado! Target supo *antes* que los padres de la niña lo que estaba sucediendo con ella.

Ahora, unos párrafos sobre la privacidad. Cuando usted utiliza su GPS para decidir cómo llegar a su destino, está claro que tiene que enviar los datos de su ubicación. Y uno lo hace tranquilo porque el servicio que recibe como devolución es verdaderamente extraordinario. En algún sentido, es como si *todos estuviéramos manejando un avión* y no un auto. No hace falta saber nada. Uno pone el lugar al que quiere llegar *¡y listo!* El algoritmo detecta la posición de su teléfono y hace el resto sin su intervención.

Por supuesto, la tecnología del GPS es muy potente, pero funciona en una avenida de doble mano: uno aprende cómo ir y, al mismo tiempo, deja una huella sobre el camino elegido y desde dónde empieza a recorrerlo.

Esa es la parte que uno no ve, o no considera. Usted está enviando señales constantemente sobre esa ubicación (la suya). Revisando esos datos, alguien interesado podría determinar los lugares en los que usted estuvo *instante por instante*. No solamente eso: podría exhibir los caminos que utiliza a diario, dónde vive (o dónde pasa las noches), dónde trabaja, los lugares que visita, los restaurantes en los que come, los negocios en donde hace sus compras, las canchas, los cines o los teatros a los que concurre, su colegio, universidad, trabajo, oficina, fábrica… Saber dónde viven sus familiares y amigos (ya que uno —en general— entra con su teléfono celular mientras hace sus visitas) y cuánto tiempo se queda en cada lugar. ¡Y listo, paro acá!

Un último dato para pensar: si una persona tuviera acceso a las

páginas que usted visitó en —digamos— la última semana desde su computadora/teléfono/tableta, ¿no cree que eso terminaría identificándola/lo? O sea, ¿cuántas personas habrán depositado su interés en *exactamente* los mismos lugares que usted? En algún sentido, es un equivalente de *¡otro ADN!* Es un ADN digital. Uno termina *autodefiniéndose* por los sitios que visita. Y si me deja, quiero aventurar algo más: todos estos datos permiten no solo saber dónde estuvo… ¡sino también ***predecir*** o ***estimar*** *dónde va a estar*! Lo mismo que quienes tengan los datos de su GPS.

Una cosa más: hace cuatro días, uno de mis amigos españoles, el genial Ramón Besa, periodista del *El País*, me preguntó: "¿Podremos ser *anónimos* otra vez?".

Mi respuesta: ¡No! Es demasiado tarde. Hemos dejado muchísimas señales en el trayecto. No hay manera de volver atrás. Eso sí, estoy seguro de que ahora estoy en condiciones de dar la respuesta que me había formulado al comienzo: ¿Gratis? ¡No…! Seguro que *gratis no es*.

22. Escribo este texto en junio de 2017.

23. Me resulta difícil encontrar una palabra en español que *incluya* todo lo que se entiende por el departamento de 'Analytics'. Podría decir que es el que se dedica a analizar estadísticas y patrones de compra. O a descubrirlos. Pero también se trata de *predecir*, de allí el valor del análisis.

Tetris

¿Tiene alguna idea de cuántos videojuegos se han vendido en el mundo en *toda* la historia? Una parte de la respuesta está en la tabla de las páginas 73-74 (extractada de Wikipedia[24]), en donde aparecen ordenados todos aquellos de los que se vendieron al menos ¡15 millones de copias! Es notable la penetración que han tenido desde su aparición a comienzos de la década de los 80, pero lo notable es que, entre los *cinco* más populares, hay *dos* que se diseñaron, programaron y empezaron a vender en el pasado siglo XX: el Tetris y todas las versiones del Super Mario Bros.

Pero lo extraordinario es que, con los datos de julio de 2017, el Tetris acaba de superar la barrera de los 495 millones… (lo escribo de nuevo… *cuatrocientos noventa y cinco millones*) de copias, incluyendo todas las plataformas posibles, desde GameBoy, Atari, Nintendo y PlayStation hasta las más actuales como teléfonos inteligentes, tabletas, etcétera.

Ahora bien: ¿qué dice todo esto? ¿Por qué se habrán hecho tan populares? ¿Tan *mal* pensamos de todas las generaciones que vinieron después de las nuestras? ¿Consumen *cualquier* cosa? ¿Y nosotros? ¿Qué es lo que se nos ofrecía —equivalente a los videojuegos, por ejemplo— que considerábamos que nos 'idiotizaba' y nos 'aislaba'?

No tengo dudas de que los sociólogos deben tener muchísimas cosas para aportar, y ni siquiera estoy seguro de lo que pienso. Pero me interesa tratar de entender un poco más lo que sucede en nuestros tiempos. Sí, porque estos tiempos… *son nuestros también, ¿no?*

Como una suerte de *homenaje/reconocimiento* al Tetris, algunos datos y un problema.

Los datos

1) El Tetris fue creado por un matemático ruso, Alexey Pajitnov, mientras trabajaba en el Centro de Computación de la Academia de Ciencias de la ex URSS. Pajitnov se dedicaba a investigaciones en Inteligencia Artificial y Reconocimiento de Voz. Tenía en ese

momento 29 años y lanzó su 'producto' el 6 de junio de 1984. La figura 1 muestra una captura de la pantalla que usaba la *primera* versión que se conoce. El Tetris revolucionó a los soviéticos y a todos los países vecinos, pero lo que terminó por convencer a todos fue su irrupción brutal en 1988, cuando fue presentado en Las Vegas, en la convención más grande del mundo en materia de productos electrónicos. La adicción al Tetris se propagó a todo el mundo y, como era esperable, personas/compañías reclamaron para sí ser los dueños de las patentes. Intervinieron rusos, norteamericanos, japoneses… y hubo juicios de todo tipo: todos contra todos. Ahora, marzo de 2017, parece que Hollywood no se lo quiere perder: como sucedió con *La red social*, la película que giró alrededor de Mark Zuckerberg (creador de Facebook), se viene una sobre lo que sucedió con el Tetris.

Juegos que vendieron al menos 15 millones de copias en plataformas múltiples

TÍTULO	LANZAMIENTO	SISTEMA(S)	COPIAS VENDIDAS / DESCARGAS PAGAS
Tetris	1984	Mobile, iOS, BlackBerry OS, PlayStation Portable, Windows Phone, Android, PlayStation 3, Nintendo Entertainment System, Game Boy	495 millones
Minecraft	2009	Windows, OS X, Linux, Xbox 360, Xbox One, PlayStation 3, PlayStation 4, Android, iOS, Apple TV, Windows Phone, Amazon Fire TV, Raspberry Pi, PlayStation Vita, Wii U	122 millones
Wii Sports	2006	Wii	82,78 millones
Grand Theft Auto V	2013	PlayStation 3, Xbox 360, PlayStation 4, Xbox One, Windows	75 millones
Super Mario Bros.	1985	Nintendo Entertainment System	40,24 millones
Mario Kart Wii	2008	Wii	36,38 millones
Tetris	1989	Game Boy	35 millones
Wii Sports Resort	2009	Wii	32,80 millones
New Super Mario Bros.	2006	Nintendo DS	30,79 millones
The Elder Scrolls V: Skyrim	2011	Microsoft Windows, PlayStation 3, Xbox 360, PlayStation 4, Xbox One	30 millones
Diablo III	2012	Microsoft Windows, OS X, Xbox 360, PlayStation 3, Xbox One, PlayStation 4	30 millones
New Super Mario Bros. Wii	2009	Wii	29,32 millones
Wii Play	2006	Wii	28,02 millones
Grand Theft Auto: San Andreas	2004	PlayStarion 2, Microsoft Windows, Xbox, Mac OS X, Xbox 360	27,5 millones
Call of Duty: Modern Warfare 3	2011	Microsoft Windows, Xbox 360, PlayStation 3, Wii	26,5 millones
Call of Duty: Black Ops	2010	Microsoft Windows, Xbox 360, PlayStation 3, Wii	26,2 millones
Grand Theft Auto IV	2008	PlayStation 3, Xbox 360, Microsoft Windows	25 millones
Overwatch	2016	Windows, Xbox One, PlayStation 4	25 millones
Call of Duty: Black Ops II	2012	Windows, Xbox One, PlayStation 3, Wii U	24,2 millones
Kinect Adventures!	2010	Xbox 360	24 millones
Nintendogs	2005	Nintendo DS	23,96 millones
Pokémon Red, Blue and Green	1996	Game Boy	23,64 millones
Mario Kart DS	2005	Nintendo DS	23,59 millones
Pokémon Gold and Silver	1999	Game Boy, Game Boy Color	23 millones
Wii Fit	2007	Wii	22,67 millones
Call of Duty: Modern Warfare 2	2009	Microsoft Windows, Xbox 360, PlayStation 3	22,29 millones

2) La palabra Tetris aparece como una combinación de otra dos: *tetrómino y tenis.* Tetra es la palabra griega que indica el número *cuatro*, la cantidad de cuadraditos que tiene cada pieza del Tetris. Así

como las piezas de dominó tienen dos cuadraditos, los tetróminos tienen cuatro; pero, por supuesto, existen los pentóminos, hexóminos, *etc.* La primera parte de la palabra indica el número de cuadraditos involucrados en la pieza. Pajitnov eligió el tenis para que participara en la palabra sencillamente porque era su juego favorito.

3) Aquellos que jugaron alguna vez (o muchas) seguramente recordarán la música de fondo. Es una canción popular rusa que recibe el nombre de “Korobéiniki”[25].

A propósito del Tetris, entonces, un problema breve, sencillo y —creo— interesante.

Las siete piezas que se usan en el Tetris son las que aparecen en la figura 2. Como usted ve, cada una se compone de cuatro cuadraditos. En total, entonces, hay 28 cuadraditos. Tome ahora un rectángulo de (7×4) como el que aparece en la figura 3. Tiene también —obviamente— 28 cuadraditos.

Entonces, esto invita para pensar: ¿se podrán ubicar de alguna forma las siete piezas del Tetris arriba del rectángulo de manera tal que lo cubran todo? Por supuesto, las piezas se pueden rotar[26] para ajustarlas a las necesidades de su estrategia, pero ¿se podrá?

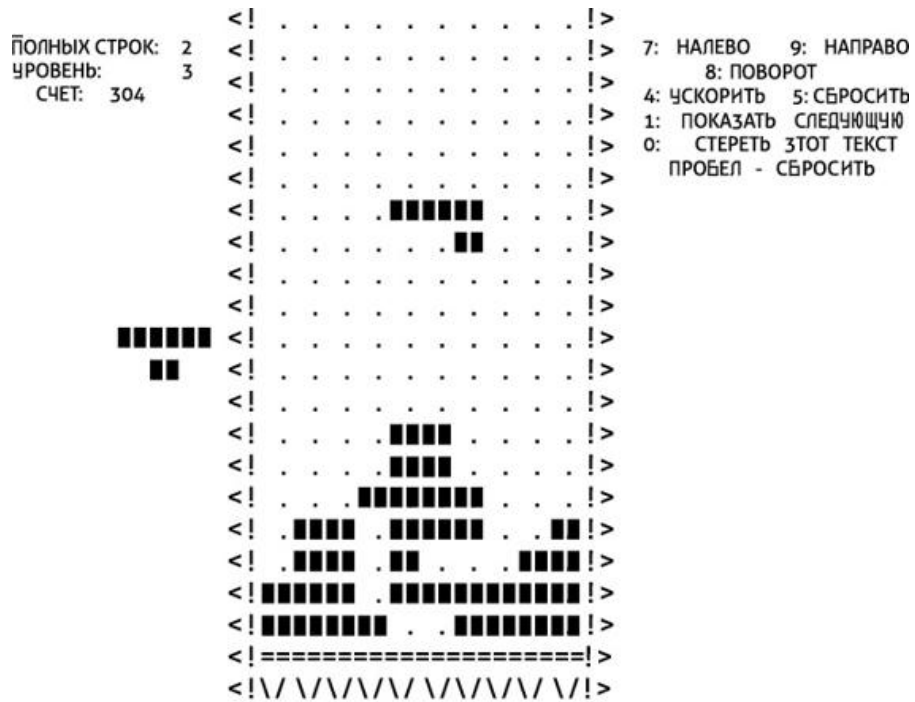


Figura 1

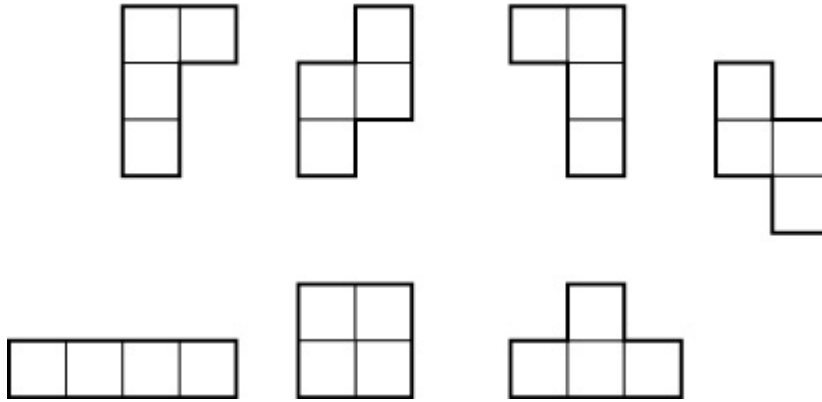


Figura 2

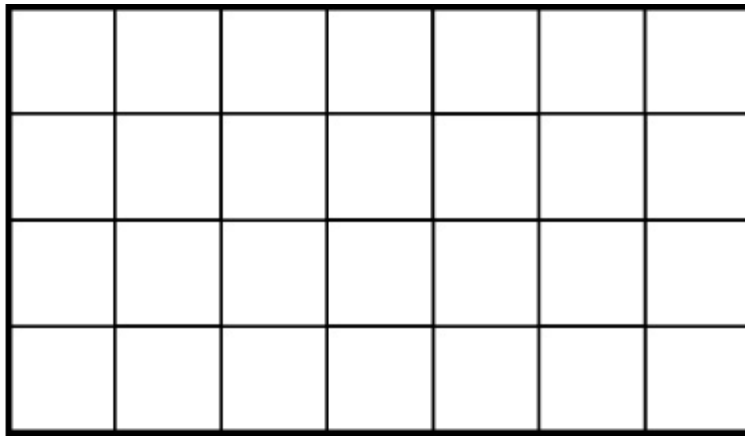


Figura 3

Si tiene ganas (y tiempo), inténtelo. Eso sí: si lo logró, haga un dibujo de forma tal que se vea *claramente* qué pieza usa en cada sector del rectángulo. Pero si usted cree que *no se puede*, ¿cómo sabe que otra persona no podrá lograr cubrir el rectángulo? Es decir, ¿cómo convencería usted a alguien de que *nadie* va a poder?

Justamente de eso se trata. Una vez más, y si me permite: no lea lo que sigue hasta no haber intentado por su cuenta y descubrir dónde reside la dificultad. Si no tiene tiempo ahora, guárdeselo para después. ¿Qué apuro hay?

Solución

Por más que uno intente… *no va a poder*. ¿Por qué? ¿Cómo convencerse de que no es *uno* quien no puede (o pudo) sino que *nadie* va a poder? Sígame por acá.

Por un lado, tome el rectángulo de (7 × 4). Pinte todos los cuadraditos de blanco y de negro de forma alternada (figura 4). Cuente la cantidad de cuadraditos blancos y negros del rectángulo. Verá que hay la misma cantidad: 14 de cada color.

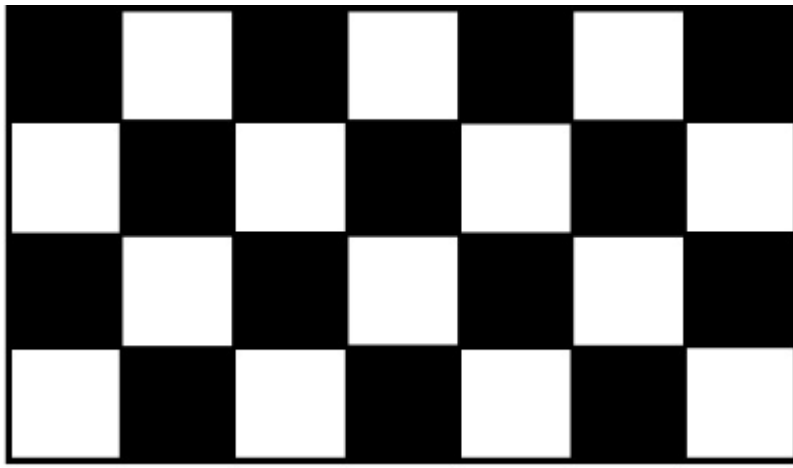


Figura 4

Ahora tome cualquiera de las seis piezas del Tetris salvo la que forma una letra 'T'. Si usted la apoya en el tablero, es fácil ver que *siempre* cubre dos cuadraditos negros y dos blancos. ¿Qué dice esto? Cuando usted haya apoyado esas seis piezas de la forma que quiera, habrá tapado 12 cuadraditos negros y 12 blancos. Quedan por cubrir dos negros y dos blancos más. ¿Y en la mano qué pieza le quedó?

Sí, *ese* es el problema. En la mano le quedó la letra 'T' y, como usted advierte en la figura 5, la letra 'T' cubre o bien tres blancos y uno negro, o al revés: tres negros y uno blanco. Entonces, como en el tablero hay la misma cantidad de blancos que de negros, la moraleja es que… ¡no se va a poder! Y este es un argumento contundente. ¡No importa lo que hagamos ni usted, ni yo, ni nadie: no se va a poder![27]

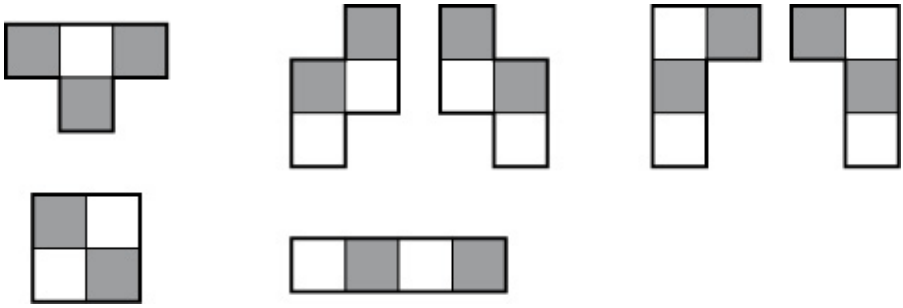


Figura 5

Como la letra ‘T’ es la *única* que no va a cubrir el mismo número de cuadrados blancos y negros, no hay estrategia posible.

Este es un caso muy sencillo porque el número (de cuadraditos) es muy pequeño, pero en general, frente a un problema más complicado, no es trivial demostrar que un camino o una solución *no va a existir*.

Argumentos de este tipo —que se llaman de *paridad*— son muy frecuentes en matemática y sirven para ahorrar muchísimo tiempo. Y de paso, ayuda a no sentirse tan sola/o: no fue únicamente usted a quien no se le ocurrió.

24. en.wikipedia.org/wiki/List_of_best-selling_video_games. Cifras actualizadas a julio de 2017.

25. La historia de la canción “Korobéiniki” se puede encontrar en es.wikipedia.org/wiki/Korobéiniki

26. Cada rotación es de 90 grados, y la pieza se puede rotar tantas veces como uno quiera antes de que se detenga en su posición final.

27. Si el número de cuadraditos negros y blancos fuera el mismo, ¡eso solo no garantizaría que las siete piezas se puedan distribuir y cubrir el rectángulo! Es decir, *no es suficiente que haya el mismo número de blancos que de negros para asegurar que hay una estrategia*. Sin embargo, lo que sí sucede es que resulta *necesario* —para que se pueda encontrar la distribución— que haya la misma cantidad de cada color. Si no, *seguro* que no se va a poder.

El problema de Josephus

Esta historia es una versión *adaptada* de lo que —supuestamente— sucedió durante el siglo I. Sí, el siglo I. Suena raro, ¿no? Más aún: la historia dio origen a un problema clásico de la matemática/computación que sobrevivió el paso del tiempo. Se lo conoce como el "problema de Josephus", ya que se supone que fue Flavius Josephus[28], un historiador judío nacido en Jerusalén, quien describió la situación que vivieron él y cuarenta soldados que lo acompañaban.

En un momento determinado de la guerra judeo-romana, Josephus y su grupo cayeron en una emboscada y quedaron atrapados en una caverna rodeada de soldados enemigos. Después de debatir cómo proceder, acordaron suicidarse antes de ser capturados. Sin embargo, Josephus no estuvo de acuerdo con la propuesta y, para que nadie tuviera que *quitarse la vida*, propuso el siguiente método: *Sentémonos todos en un círculo. Alguno de nosotros empezará primero y matará a quien tenga sentado a la izquierda y así vamos a seguir hasta que —claramente— quedará nada más que uno solo de nosotros con vida.* ***Ese*** *será el único que tendrá que suicidarse.*

Fíjese en la figura 1.

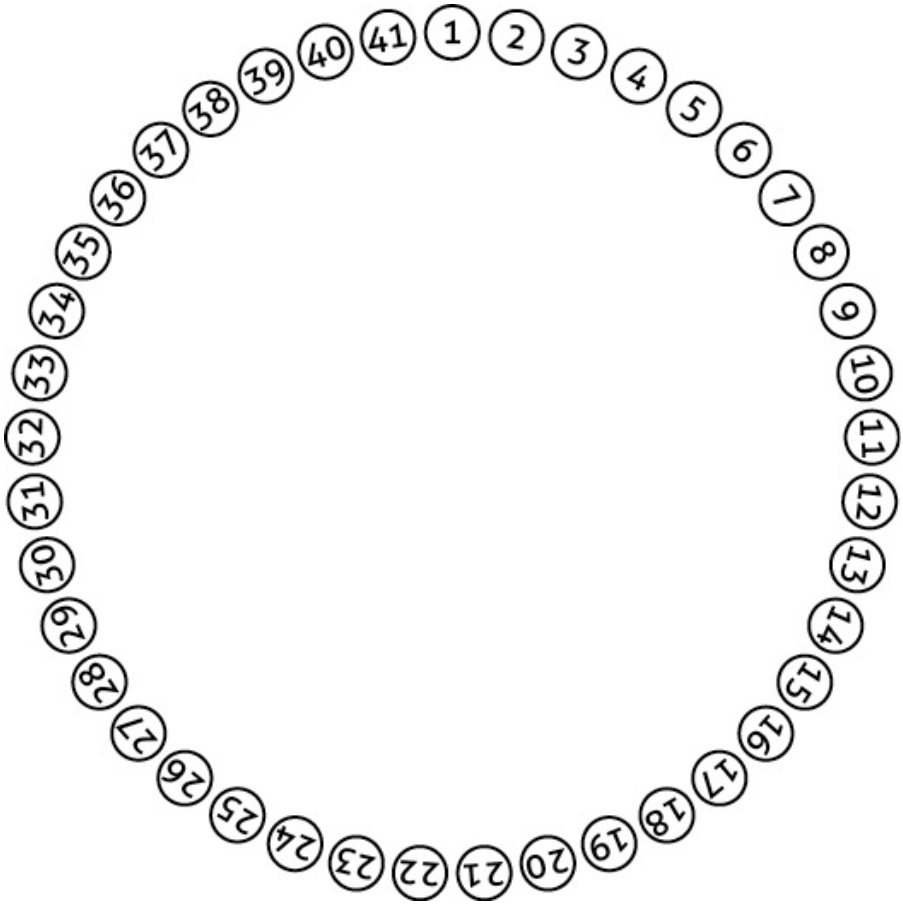


Figura 1

Allí están las cuarenta y una posiciones numeradas de forma creciente. Supongamos que empieza el que está sentado en la posición número 1. Ese soldado matará al 2. Luego, el 3 matará al 4, el 5 al 6… y así siguiendo. Como usted advierte, llegará un momento en el que habrán muerto *todos* los que están sentados en las posiciones que llevan un número *par*. Pero cuando muera el *último* de ellos, el número 40 (a manos del 39), el 41 estará vivo aún. Ahora, el que el 41 tiene sentado a la izquierda es el número 1, quien había empezado con los asesinatos. De acuerdo con las reglas, el 41 matará al 1, el 3 matará al 5, *etc.* Creo que ahora está claro que van a morir todos hasta que quede solamente *uno* con vida.

Aquí aparece una parte interesante de la historia de Josephus. En principio, habrían de morir *todos* los soldados que estaban con Josephus en la caverna, pero la diferencia es que quien quedara último tendría que suicidarse… Más aún: el sobreviviente tendría que

quitarse la vida y no habría *ningún otro integrante del grupo que estuviera vivo* para verificar que lo hiciera.

Como usted se imagina, Josephus *eligió* un lugar particular del círculo y se sentó allí. Él sabía que siguiendo las reglas, habría de quedar como único sobreviviente. Esperó que todos estuvieran muertos y, en lugar de suicidarse, salió de la caverna y se entregó al enemigo.

Pregunta: ¿en qué lugar se sentó Josephus?

El problema es muy conocido en el mundo de la matemática[29] y los programadores, y es por eso que hay muchísima literatura escrita sobre el tema, pero no hace falta saber nada particular para poder pensarlo. La versión que figura antes es solo una de las posibles variantes (la más sencilla), y si yo estuviera junto a usted, le sugeriría que *no empiece* con el caso de los 41 soldados, sino que intente con números más pequeños de manera tal de ver si le es posible *intuir* o *imaginar* una estrategia para determinar al *ganador* o *sobreviviente* a medida que va incrementando la cantidad de soldados.

De la misma forma, una vez que hayamos resuelto el problema para 41 soldados, sería interesante pensar en una estrategia que permita deducir cuál será la posición *ganadora* en un caso general, es decir, independizarse del número 41 y encontrar alguna estrategia o fórmula que permita deducir el número que hay que elegir sin tener que recorrer todos los pasos intermedios.

Ideas para pensar la solución

Una solución posible es sentarse con tiempo y empezar a recorrer el círculo con los 41 números ubicados como se ve en la figura 1. Después de un rato, estoy seguro de que usted encontrará la respuesta. Y no está mal resolver el problema de esta forma. De hecho, *¡encuentra **la** solución!* ¿No era eso lo que quería? Sí, es verdad… *es* lo que quería, pero sería interesante ver si uno puede deducir otro tipo de respuesta. ¿A qué me refiero?

Por un lado, es muy *tedioso* tener que recorrer *todos* los pasos intermedios. ¿No habrá *otra* forma de encontrar al 'sobreviviente'? Y por otro, ¿no le surge algún tipo de curiosidad que permita encontrar la respuesta para *cualquier* número de soldados? ¿Será posible encontrar una *tal* fórmula?

En fin: yo creo que sí, que vale la pena *pensar* en esas dos direcciones. Veamos si lo logro y en el camino la/lo seduzco a usted también. Acompáñeme por aquí.

Como propuse anteriormente, empecemos con números más

pequeños.

Si hubiera nada más que *un solo soldado,* no hay nada que pensar. El *sobreviviente* es el único participante (o soldado) que hay y lo declaramos *ganador*.

En cambio, si hubiera *dos* soldados, entonces, el *uno* elimina al *dos* y allí se termina el juego también. Ganador: el número *uno.*

Sigo. Si ahora fueran *tres* soldados: 1-2-3.

En este caso, el 1 elimina al 2 pero el 3 está vivo aún y siguiendo el orden del círculo, el 3 elimina al 1. Ganador: número 3

Si fueran *cuatro* soldados: 1-2-3-4.

Entonces 1 elimina a 2, y 3 elimina a 4. Quedan 1 y 3. El turno es otra vez para el número 1 que elimina al 3 y queda como único sobreviviente. Ganador: número 1.

Si fueran *cinco* soldados: 1-2-3-4-5.

Voy un poco más rápido ahora. Quedan eliminados los dos pares (2 y 4), pero fíjese que ni bien queda eliminado el 4, el turno le corresponde al 5. O sea: sobreviven 5-1-3, pero 5 es el que empieza. Luego, 5 elimina al 1 y le toca el turno al 3. El 3 elimina al 5 y queda como sobreviviente. Ganador: número 3.

Una breve pausa. Ahora que advirtió lo que estoy haciendo, ¿no tiene ganas de seguir usted por su cuenta? Yo voy a seguir igual, pero decía…

Si fueran *seis* soldados: 1-2-3-4-5-6.

En el primer paso —como siempre— quedan eliminados todos los pares. Sobreviven 1-3-5. Después que 5 eliminó a 6, le toca una vez más al número 1. El 1 elimina al 3 y por último, el 5 elimina al 1. Ganador: número 5.

Para *siete* soldados: 1-2-3-4-5-6-7.

En el primer paso quedan eliminados todos los pares, pero cuando queda afuera el número 6 (que es el último par), le toca el turno al número 7. Los que quedan son: 7-1-3-5, en ese orden. El 7 elimina al 1, el 3 al 5, y quedan: 7 y 3, y es el turno del 7, que elimina al 3. Ganador: número 7.

Ahora, voy a escribir una lista de los resultados que se obtienen al aumentar el número de personas que participan. Vea la tabla 1. Le sugiero que la revise para verificar que los cálculos que hice son correctos.

Tabla 1

Número de personas	Sobreviviente (o ganador)
1	

1	2
2	3
3	4
4	5
5	6
6	7
7	8
8	9
9	10
10	11
11	12
12	13
13	14
14	15
15	16
16	17
17	18
18	19
19	20
20	21
21	22
22	23
23	24
24	25
25	26
26	27
27	28
28	29
29	30
30	31
31	32
32	33
33	...

Antes de avanzar, le pido que mire la lista con cuidado. ¿Qué *ideas* se le ocurren? ¿No se siente *tentada/o* de sacar algunas conclusiones?

Le sugiero que intente *conjeturar* una *regla* general para cualquier número de personas, aunque después tenga que modificarla. Escríbala en un papel y trate de verificar si, usando los números que figuran en la tabla anterior, los resultados que usted obtiene son los que figuran en la segunda columna. Es decir, *el ejercicio de* ***conjeturar*** una fórmula es la parte *más importante de todo este texto*. Es la parte que lo ayuda a usted. Y créame, es totalmente irrelevante que se le ocurra una

fórmula correcta, lo que *sí* importa es la posibilidad que se le ofrece de *imaginar algo nuevo, algo que no pensó nunca antes, algo que la/lo hará sentir* ***la potencia de poder pensar***. En fin, sigo…

Mientras tanto le propongo que nos detengamos (juntos) a ver si podemos detectar *algunos patrones.* Fíjese si está de acuerdo conmigo.

a. El número 1 aparece ganador cuando hay 1, 2, 4, 8, 16, 32… número de soldados. ¿Qué sugiere esto? Fíjese que estos números son *exactamente* las primeras *potencias de dos*. O sea: $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$, $32 = 2^5$… Ante esta evidencia, uno tiene derecho a conjeturar: *¿será verdad que si el número de soldados es una potencia de dos, entonces el ganador será* ***siempre*** *el número 1?* Quiere pensar usted… Por las dudas: la respuesta es *sí, eso sucede siempre*. Ahora *¿por qué* pasará esto?
b. Por otro lado, más allá de lo que sucede con las potencias de dos, fíjese que, a medida que se va incrementando el número de soldados, en la columna de la derecha quedan como 'sobrevivientes' únicamente números impares (esto en sí mismo no es una sorpresa porque ya sabemos que los primeros eliminados son los *pares*). Lo notable es que los impares aparecen *todos*, sin saltearse ninguno, pero el proceso se detiene *justo* cuando uno llega a… ¿qué le parece a usted que sucede? ¿No tiene ganas de darse un tiempo para pensar? Quizás ese tiempo le sirva para conjeturar alguna *fórmula* que permita *anticipar los resultados que aparecen en la columna de la derecha.*

Las preguntas que escribí antes son las que me sirvieron a mí, pero no tiene por qué ser el camino que le sirva a usted. En cualquier caso, lo que interesa es poder encontrar alguna fórmula que permita contestar lo que sucedió en el caso original (de 41 soldados) y obtener una fórmula más general para cualquier número de soldados.

Más ideas

Pensemos juntos estas ideas. Sí, ya sé, no estamos juntos y ni siquiera sé cuál será/sería su respuesta. Pero igual permítame 'fantasear' con que usted está acá, cerca.

Como le propuse antes, creo que vale la pena atender el caso particular de las potencias de dos. Mirando la tabla 1, queda claro que en los primeros casos (1, 2, 4, 8, 16, 32) el *ganador* es el número 1. De acuerdo. ¿Por qué pasa? ¿Pasará también para el *resto* de las potencias

de 2? ¿Qué tienen las potencias de 2 que las hace *tan* particulares?

Mire: tome el número 32. La mitad es 16, que *también* es una potencia de 2. Y la mitad de 16 es 8, que *también* es una potencia de 2. Y así siguiendo. El proceso empieza en 32 y pasa por 16, 8, 4, 2 hasta llegar a 1. No es ninguna novedad porque eso pasa *únicamente* con las potencias de 2. Sin embargo, este hecho, que parece tan obvio, me sirvió para entender y contestar la primera pregunta que planteé. Fíjese cómo lo podemos usar para el caso 64 que *no está en la tabla 1*.

Si uno tiene 64 soldados, los primeros eliminados —como siempre — serán los números *pares*. Quedan 32 que, como ya sabíamos, iba a ser *otra* potencia de 2. Pero no solo eso: una vez eliminado el 64 (el último de los pares)… ¿a quién le toca ahora? ¡Le toca al 1! Es decir, ahora quedan 32 (*todos los impares*) pero el que empieza es el número 1… y ya sabemos que si uno tiene 32 soldados, el que tiene el número 1 (el que empieza) ¡es el ganador! Bueno, eso es lo que pasa en este caso, también. Es decir, si uno tiene 64 soldados, una vez recorrida la primera tanda de eliminados, aparece una situación que ya conocíamos: 32 soldados (una potencia de 2) y ¡el ganador es el que empieza! Y como empieza el 1, se confirma lo que sospechábamos: en el caso 64, el ganador *también* es el número 1.

¿Se da cuenta de que esta idea se puede usar *siempre*? Es decir, ahora que sabemos que cuando inician 64 soldados el número 1 vuelve a ganar, este nuevo dato lo puede usar para la siguiente potencia de 2, o sea, 128. Y lo mismo con todas las que siguen: 256, 512, 1024, *etc.* Este argumento que usamos es *tan poderoso* que permite sacar esta conclusión (léala para ver si está de acuerdo conmigo): “Si el número de personas involucradas es una potencia de 2, el ganador es el que *empieza*”.

Me importa —*mucho*— que usted detecte que escribí *el que empieza*, y no el número 1. ¿Por qué? ¿Quiere pensar usted?

Por supuesto, en todos los casos que planteé en la tabla 1, cuando el número de soldados es una potencia de 2, el ganador (o sobreviviente) es el número 1. Pero tengo una pregunta para hacerle. Por ejemplo, en el caso de los *cuatro* soldados, los tenemos numerados: 1-2-3-4. Vimos que el número *uno* es el ganador, y está todo bien. ¿Qué pasará si *cambiamos* el soldado que empieza. Es decir, suponga que empieza el número 3, entonces ¿quién gana? Lo dejo un instante para pensar la respuesta.

Sí, tiene razón: ¡el sobreviviente ahora es el número 3! O sea, lo *único* que cambia son las ‘etiquetas’, pero lo que importa es que si hay cuatro soldados, el ganador es el que empieza.

Naturalmente, lo mismo se puede decir de cualquier caso en donde

el número inicial de soldados sea una potencia de dos: el que empieza ¡gana! Es decir, si uno tiene 128 soldados y empieza el número 34, ¡ese será el ganador! Claro, si empieza el 34, los primeros eliminados en la primera 'ronda' serán *todos* los impares. En particular, fíjese también que cuando quede eliminado el 127, le tocará el turno al 128, y como en ese momento todavía *no dieron una vuelta completa*, el 128 tendrá al número uno todavía compitiendo. Moraleja: el 128 elimina al 1, el 2 eliminará al 3, el 4 al 5… y así siguiendo, hasta que vuelva a ser el turno del 34… En ese momento, solamente quedarán 64 (como sabíamos, una potencia de 2) y el que empieza es el 34 otra vez. Las 'etiquetas' que tiene cada jugador son distintas, pero la conclusión es la misma: el que empieza gana.

Y ahora, llegado este punto, quiero *subir la apuesta*. ¿Qué? Mire, como ya habrá advertido, el número que tenga cada jugador no es lo más relevante. Lo que importa es el *orden* en el que están ocupando el círculo. Es decir, importan tres cosas:

a) Cuántos soldados hay,

b) El orden en el que están ubicados, y (*)

c) Quién es el que empieza.

Dicho esto, quiero proponerle pensar algo más.

Fíjese en la tabla 1 otra vez. Considere el caso en donde hay 11 soldados. Si usted mira la segunda columna, el ganador será el número 7. A esta altura, no es ninguna novedad, pero hay algo que usted y yo estamos suponiendo y que no está explícitamente escrito: para que el ganador sea el número 7, ¡estamos asumiendo que quien empieza es el número 1!

De acuerdo, ¿y si empieza el juego *otro soldado*? ¿Qué pasa entonces? El número de soldados no varía: seguirán siendo 11 participantes igual que antes pero hay que revisar el resultado. ¿Quiere pensar usted?

Fíjese en la figura 2.

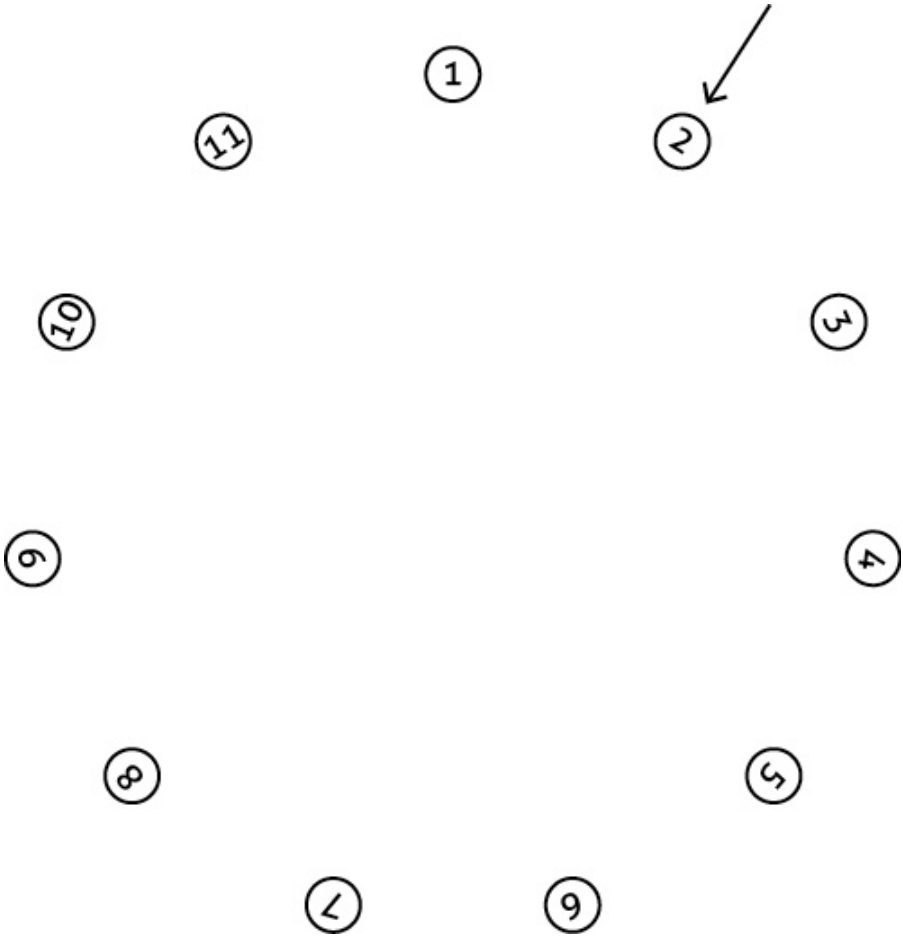


Figura 2

Hagamos una prueba y supongamos que empieza el número 2. Veamos qué sucede. Ahora, el *orden* es el siguiente:

2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-1

La situación no cambia mucho, *salvo* que lo que hicimos antes cuando empezaba el *uno*, ahora estará *corrido* un casillero. En lugar de quedar eliminados todos los pares (en la primera pasada), quedarán eliminados *todos los impares*, hasta que llegue al 2 nuevamente.

Esto es lo que sucede al ir recorriendo el círculo (los 'tachados' son los eliminados):

2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-1
2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-1
1-2-4-6-8-10
1-4-8

Conclusión: si seguimos teniendo 11 participantes pero quien empieza es el 2, en lugar de 'ganar' el 7, ahora el ganador es el 8.

Mirando la tabla 1 otra vez, si uno tuviera 29 participantes y empieza el 13 (en lugar del 1), *todo* aparecerá *corrido* en 12 lugares, ya que uno tiene que hacer 12 movidas para llegar desde el 1 hasta el 13. Lo que importa es que ahora el 13 es quien *hace el papel* que antes tenía el 1. ¿Y cuál será el ganador? Fíjese que si empezara el 1, ganaría el 27, por lo que deberíamos 'correr' al ganador 12 lugares en el círculo. ¿Y entonces?

En este caso, el ganador es el número 10. ¿Por qué? Una vez más, mire la figura 3.

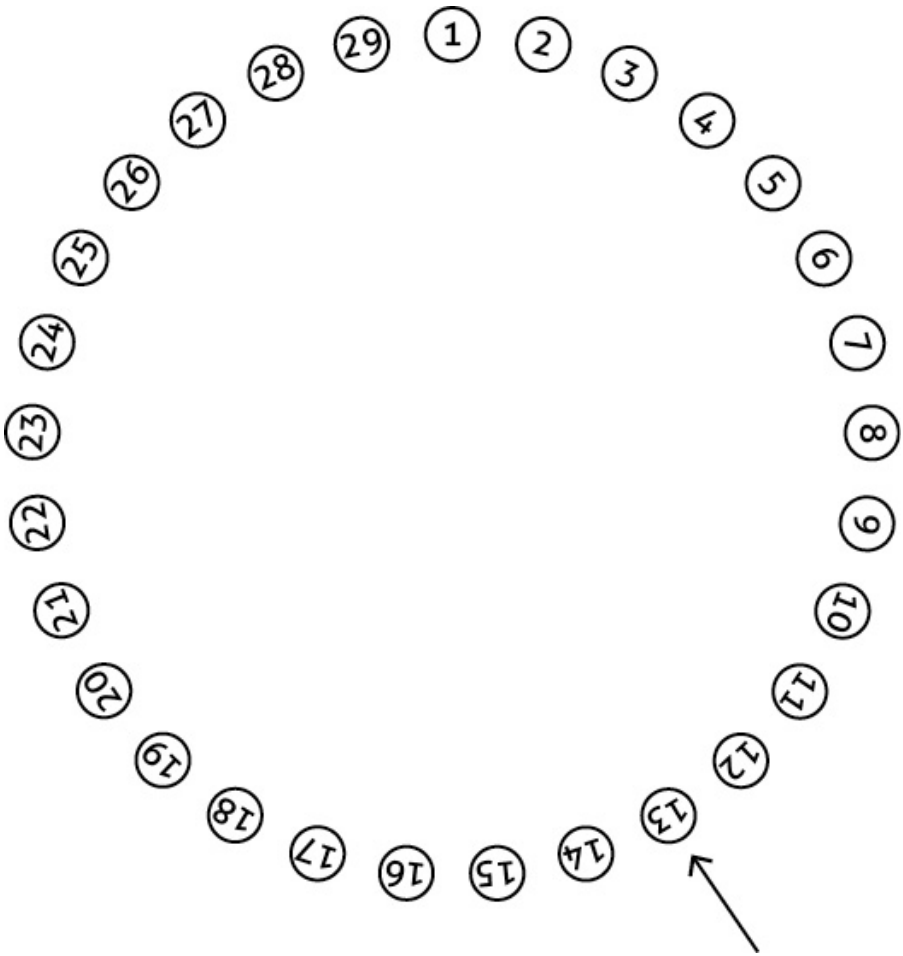


Figura 3

Así como uno modifica al 'iniciador' del juego y pasa del 1 al 13 moviéndose 12 lugares alrededor del círculo, si hacemos lo mismo ahora con el 27 (y le pido que lo haga para convencerse), verá que recorriendo 12 lugares se llega al número 10. Es que al pasar por el 29, uno 'empieza' a contar de nuevo. De hecho, las primeras dos movidas (comenzando en el 27) sirven para llegar hasta el 29, pero todavía faltan 10 más. Justamente, esas 10 que faltan nos depositan en el número 10.

Hemos avanzado mucho y creo que si usted llegó hasta acá, tiene una idea mucho más clara de lo que sucede con el problema o, al menos, es lo que *yo* siento. Pero todavía falta un poco para llegar al final. Todavía nos falta encontrar una fórmula general que nos permita saber cuál es el ganador con cualquier el número de participantes. En realidad, el *único* caso que sabemos contestar es que el ganador es el número 1 si el número de jugadores es una potencia de 2 (y empieza el número 1).

Todo bien, pero ¿si el número de participantes *no es una potencia de dos*? ¿Entonces?

Acá es donde quiero sugerirle que vuelva a mirar la tabla 1. Si uno *excluyera* las potencias de 2, el número del participante ganador va cambiando… pero *no* de cualquier forma. Fíjese que siempre es un número impar. Eso estaba claro porque los primeros eliminados son siempre los pares, pero lo interesante es que el sobreviviente es un jugador cuyo número se va incrementando *en dos* a medida que aumenta en uno el número de personas.

No solo eso: si usted va recorriendo la tabla 1, cuando el número de participantes llega a una potencia de 2, el ganador *vuelve a ser el número 1* y todo empieza de nuevo. ¿Qué dice esto? O mejor dicho: ¿qué enseña? ¿Por qué pasará esto? ¿Sucederá siempre?

Algunas ideas más

A esta altura, usted debe haber advertido que, para este problema, *ser* o *no ser* una potencia de dos es relevante. Pero quiero *aumentar la apuesta*. Le quiero proponer algo más para que pensemos juntos.

Elijamos un número cualquiera que *no sea* una potencia de 2. Por ejemplo, el número 7. Querría escribir al número 7 como *suma* de dos números positivos pero de manera tal que *uno* de ellos sea una potencia de 2.

¿Cuáles son las posibilidades? Uno podría escribirlo así:

$$7 = \mathbf{1} + 6$$

$$7 = \mathbf{2} + 5$$
$$7 = \mathbf{4} + 3$$

Y listo. No se puede de ninguna otra forma. Si quisiera usar la *siguiente* potencia de 2 (el número 8), *me paso del 7* y entonces no va a servir porque el otro número tendrá que ser 'negativo'.

Si en lugar del 7 eligiéramos el número 43, ¿de cuántas formas se puede descomponer como *suma* de dos números positivos de manera tal que *uno* de ellos sea una potencia de 2?

$$43 = \mathbf{1} + 42$$
$$43 = \mathbf{2} + 41$$
$$43 = \mathbf{4} + 39$$
$$43 = \mathbf{8} + 35$$
$$43 = \mathbf{16} + 27$$
$$43 = \mathbf{32} + 11$$

Y nada más. Lo interesante es que si en lugar de preguntar de cuántas formas se puede descomponer un número como suma de dos positivos de manera tal que *uno* de ellos sea una potencia de dos, yo *agregara* que la potencia de dos que yo encuentre sea la *máxima* o *más grande* posible… en ese caso, ya no habría una ***lista*** *de descomposiciones* para cada número, sino que habría ¡*nada más que* ***una*** *descomposición*!

Ahora bien: podría hacer la pregunta de otra forma. Suponga que otra vez elijo el número 7 y ahora le preguntara: ¿cuál es la máxima potencia de 2 que *cabe* dentro del 7?

Y sí, creo que usted ahora puede *contestar* la pregunta. Como el número 7 se puede descomponer así:

$$7 = \mathbf{4} + 3 = \mathbf{2}^2 + 3$$

entonces, la *máxima* potencia de 2 que 'entra' en el número 7 es el número 4.

De la misma forma, si yo le preguntara cuál es la *máxima potencia de 2* que *cabe* dentro del número 13, ¿usted qué me respondería?

Le pregunto: ¿cómo se podrá descomponer al número 13?

El número 13 se puede escribir como:

$$13 = \mathbf{8} + 5 = \mathbf{2}^3 + 5$$

Luego, la *máxima potencia de 2 que cabe* dentro del 13 es el número 8.

De la misma forma, yendo unos párrafos hacia atrás, como el número 43 se puede descomponer así:

$$43 = \mathbf{32} + 11$$

entonces, 32 es la *máxima* potencia de 2 que cabe dentro de él. Si yo estuviera en su lugar me preguntaría: ¿de dónde salen estas preguntas? ¿Por qué importarán ahora?

Téngame un poquito de paciencia y verá cómo todo empezará a cerrar. No crea que me olvidé de que el objetivo es tratar de encontrar una fórmula general que prediga cuál va a ser el sobreviviente en el juego que planteé al principio. No, no me olvidé, pero le pido que me siga por acá. Hagamos juntos un ejemplo más e investiguemos lo que sucede.

Voy a empezar con un ejemplo que está en la tabla 1, pero le pido que —por ahora— no se fije en el resultado. Suponga que en el problema original tenemos 19 personas. ¿Cuál será el sobreviviente si empezara a jugar el número 1? No, no se fije… Vamos a ver si podemos deducirlo con todos los datos que tenemos ahora. Acompáñeme en este recorrido.

¿Cuál es la *máxima* potencia de 2 que *cabe* dentro del 19? Tómese un instante para pensar. Sí, efectivamente, es el número 16. Es decir, al número 19 lo podemos descomponer así:

$$19 = \mathbf{16} + 3$$

Ahora, mire la figura 4.

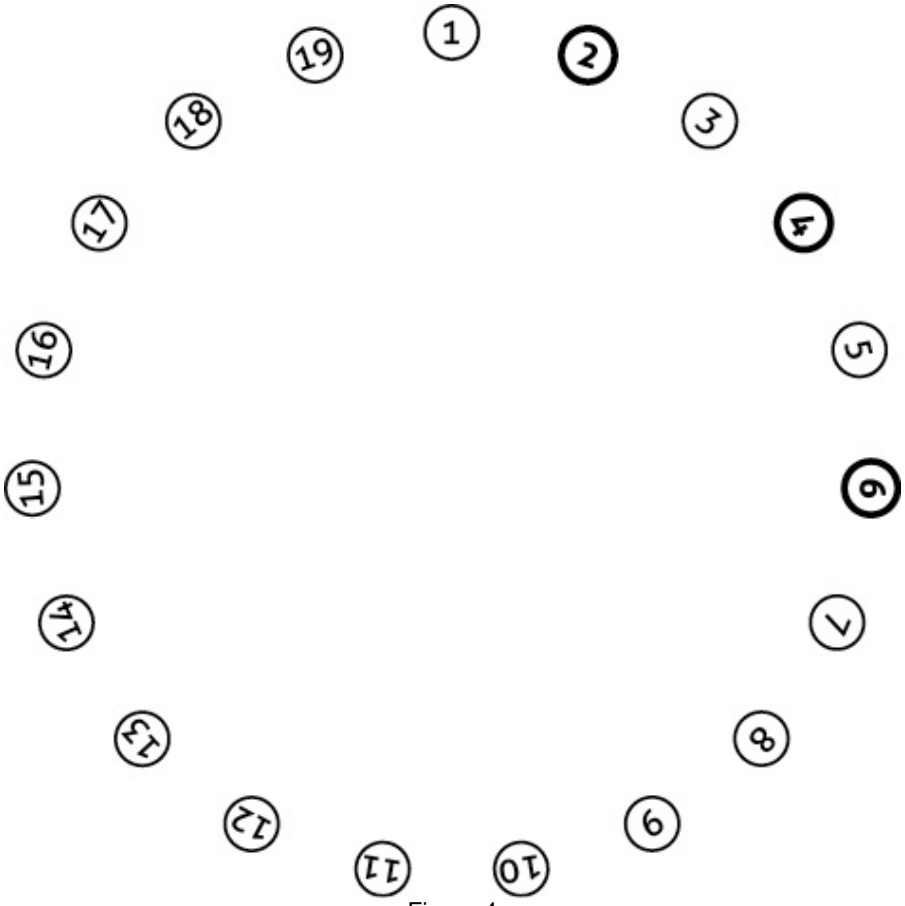


Figura 4

Empiece a recorrer el círculo desde el número 1. Fíjese que si hacemos los tres primeros pasos, quedan eliminados el 2, el 4 y el 6. Entonces, del *total* de 19 personas que tenemos originalmente, al empezar con el 1 y descartar a los tres primeros (2, 4 y 6), ¿cuántos participantes quedan? Piénselo usted por favor.

Y sí: como originalmente había 19, después de los 3 primeros eliminados quedan 16, ¡y 16 es una potencia de 2! Y ya sabemos que si uno tiene una potencia de 2, ¡el que empieza *gana*! Entonces ¿qué se puede deducir de esto?

Es que al haber quedado eliminados tres participantes, estamos en condiciones de usar lo que ya sabíamos para las potencias de 2: que el sobreviviente es el que empieza. Y como los tres eliminados (en este caso) son el 2, 4 y 6, el que empieza ¡es el 7! Ahora, si quiere, vaya y fíjese en la tabla 1 y verá que hemos encontrado al sobreviviente por nuestra cuenta.

¿Y por qué le pedí que hiciéramos nada más que tres pasos? Justamente habíamos escrito al número 19 como la suma de 16 más 3, en donde 16 era la *máxima potencia de 2 que cabía* dentro de 19. Luego, eliminados los tres primeros participantes (para llegar a los 16 que queremos), el que empieza ¡gana!

Probemos con otro caso. Tomemos el número 41, el que dio origen al problema. ¿Cómo hacer?

Primero debemos buscar *la máxima potencia de 2* que cabe en 41. En este caso, 41 se escribe así:

$$41 = \mathbf{32} + 9$$

¿Qué necesitamos, entonces? Empezar en el número 1 y eliminar los primeros 9 participantes (para llegar a 32). Fijémonos cuáles son los eliminados y quién empezará en ese momento. Los que quedarán descartados son:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 y 18

A partir de ese momento, quedan 32 participantes (como queríamos, una potencia de 2). ¿Quién empieza? ¡El número 19! Esa es la solución al problema.

Ahora estamos *muy* cerca de poder contestar el problema en general. Voy a plantear un último ejemplo y le propongo que lo haga usted por su cuenta. Lo único que voy a hacer es escribir la solución a continuación, para que pueda confirmar que la que encontró usted es la misma que la que encontré yo.

Si tuviéramos 170 participantes, ¿quién será el ganador? (Ahora, le toca a usted).

Solución

¿Cuál es la potencia más grande de 2 que *cabe* en 170? 128. Luego,

$$170 = \mathbf{128} + 42$$

Entonces, hay que *eliminar* 42 participantes para saber quién empieza a partir de allí. Como empieza el número 1, los que van desapareciendo son los pares. Tenemos que eliminar 42 pares, o sea, desde el 2 hasta el 84. ¿Entiende por qué llegamos al 84? Es que desde el 2 hasta el 84, hay *exactamente 42* números pares.

Ahora lo que nos falta hacer es encontrar qué número llevará el participante que seguirá a partir de allí, cuando queden 128 participantes. Como el último eliminado es el 84, el que empieza y

será ganador ¡es el número 85!

Listo. Esta parte ya está, pero nos queda un *ultimísimo* paso. ¿Cómo hacer para poder *descubrir* al que quedará vivo una vez que ya encontramos la *máxima potencia de 2 que cabe dentro del número*? ¿Habrá alguna manera *sencilla* de hacerlo?

Exploremos juntos. Usted me da un número cualquiera al que voy a llamar *N* (que serán los participantes), y yo tengo que encontrar la máxima potencia de 2 que *cabe*[30] en el número *N*. Supongamos que se puede escribir así:

$$N = 2^{a} + B$$

Al llegar acá, ya sabemos que lo que hay que hacer es *eliminar* B participantes. Como van a ser todos pares, tengo que recorrer los primeros 2 × B números, ya que la mitad de ellos serán los impares que van a quedar. O sea, para eliminar B números pares, necesito avanzar en el recorrido por el círculo hasta llegar al número 2 × B. Y acá, ya estamos en condiciones de contestar la pregunta: el *número del participante ganador será*

$$(2 \times B) + 1$$

Notable, ¿no? Esta fórmula es la que resuelve el problema, contesta la pregunta y lo hace de forma *general*[31].

Fíjese, ahora, que ya no necesita más la tabla 1, sino que puede *deducirla*. Escribo entonces la tabla 2.

Tabla 2

N (número de personas)	2^{a}	2^{a}	B	B	1
2	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**
2	**0**	**2**	**0**	**2**	**1**
2	**1**	**3**	**1**	**3**	**3**
2	**0**	**4**	**0**	**4**	**1**
2	**1**	**5**	**1**	**5**	**3**
2	**2**	**6**	**2**	**6**	**5**
2	**3**	**7**	**3**	**7**	**7**
2	**0**	**8**	**0**	**8**	**1**
2	**1**	**9**	**1**	**9**	**3**
2	**2**	**10**	**2**	**10**	**5**
2	**3**	**11**	**3**	**11**	**7**
2	**4**	**12**	**4**	**12**	**9**
2	**5**	**13**	**5**	**13**	**11**
2	**6**	**14**	**6**	**14**	**13**
2	**7**	**15**	**7**	**15**	**15**

$$2 \times 10 + 1 = 1$$
$$2 \times 11 + 1 = 3$$
$$2 \times 12 + 1 = 5$$
$$2 \times 13 + 1 = 7$$
$$2 \times 14 + 1 = 9$$
$$2 \times 15 + 1 = 11$$
$$2 \times 16 + 1 = 13$$
$$2 \times 17 + 1 = 15$$
$$2 \times 18 + 1 = 17$$
$$2 \times 19 + 1 = 19$$
$$2 \times 20 + 1 = 21$$
$$2 \times 21 + 1 = 23$$
$$2 \times 22 + 1 = 25$$
$$2 \times 23 + 1 = 27$$
$$2 \times 24 + 1 = 29$$
$$2 \times 25 + 1 = 31$$
$$2 \times 32 + 1 = 1$$
...

28. En castellano, Flavio Josefo.

29. es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_Flavio_Josefo y matesmates.wordpress.com/2012/01/03/el-problema-de-flavio-josefo

30. En términos más *técnicos* habría que decir: $N = 2^a + B$, donde $B < 2^a$.

31. Para quienes quieran avanzar un poco más en este tema, les recomiendo escribir en base dos al número de participantes. La solución se obtiene retirando el primer *uno* de la escritura y agregándolo al final. Por otro lado, es un ejercicio muy interesante modificar el enunciado, de manera tal que en lugar de 'saltear' al que tiene a su izquierda, saltea 'k' personas y 'mata' al (k + 1). El problema consiste ahora en determinar en qué lugar sentarse para ser el sobreviviente.

Atándose los zapatos

Suponga que usted está en una estación de tren o en un aeropuerto y tiene que ir desde un punto A hasta un punto B (siempre dentro del mismo edificio). Para hacer las cosas más simples, pensemos que el trayecto es en línea recta. La primera parte tendrá que recorrerla caminando pero para la segunda (y última) hay una cinta que se desliza hacia adelante y que le permitirá disminuir el tiempo invertido, si es que usted sigue caminando sobre ella.

El problema está dividido en dos partes. El objetivo es llegar desde A hasta B en el menor tiempo posible.

a. Suponga que usted descubre que necesita detenerse un momento, por ejemplo, para atarse los zapatos. ¿Dónde le conviene más hacerlo: mientras está en el piso, cuando está arriba de la cinta o da lo mismo?
b. Si usted tuviera suficiente energía como para *correr* un pequeño trecho, ¿le conviene correr mientras está en el piso, cuando está arriba de la cinta o no hay diferencia?

Por supuesto, estoy imaginando condiciones ideales (que sé muy bien que no son alcanzables): estoy asumiendo que no hay ninguna otra persona ni objeto que le obstruya el camino ni en el piso ni en la cinta, que su velocidad de marcha es constante en ambos casos, que cuando corre lo hace también siempre a la misma velocidad, que el tiempo que le llevaría atarse los cordones es el mismo tanto abajo como arriba de la cinta, *etc.* Es decir, todo lo que *debería pasar para que las preguntas tengan sentido… ¡pasa!*

Dicho esto, ¿usted qué cree? ¿Qué conviene hacer en cada caso?

Solución

Espero que le haya dedicado algún tiempo a pensar lo que sucede en cada situación porque hay muchísimas formas de convencerse sobre lo que conviene hacer, y no está claro que la que me sirvió a mí

le servirá a usted. Yo le ofrezco las mías pero —como siempre— no le aportarán nada si usted no hizo ningún intento de pensar por su cuenta. Acá voy.

Para la primera pregunta, le propongo que imagine que en lugar de estar solamente usted haciendo el trayecto entre A y B, estamos los dos, usted y yo, como si hubiera una 'réplica' suya. Empezamos a caminar los dos (a la misma velocidad). Cuando llegamos al *borde* de la cinta, yo me detengo y me ato los cordones, mientras que usted da un solo paso más y, ni bien se sube a la cinta móvil, hace lo mismo con *sus* zapatos. ¿Quiere pensar ahora quién de los dos llega primero a B?

Sigo. Como usted advierte, en el momento en el que los dos terminemos de atarnos los zapatos, yo estaré mucho más atrás. Usted me sacará una ventaja que yo no podré recuperar. El tiempo que consumimos en atarnos los cordones fue el mismo, pero yo nunca más podré alcanzarla/o: como los dos vamos al mismo paso, la distancia que usted estableció conmigo es irrecuperable.

¿Moraleja? *Conviene atarse los cordones* ***arriba*** *de la cinta* para llegar más rápido hasta B.

Ahora le propongo que piense el segundo caso con la misma idea que yo utilicé antes (si es que le sirvió para convencerse de lo que convenía hacer). Suponga que una vez más estamos los dos en el punto A y yo funciono como una suerte de 'réplica' suya. Empezamos los dos juntos pero, ni bien salimos de A, usted empieza a correr y yo sigo caminando. Cuando usted se sube a la cinta, deja de correr y comienza a caminar a la misma velocidad a la que voy caminando yo (todavía en el piso). En ese momento usted me sacó una ventaja de X metros (no importa cuántos).

Ahora fíjese lo que sucede: *todo* el tiempo que usted esté en la cinta y yo vaya caminando por el piso, esa ventaja de X metros empieza a aumentar (porque la cinta se mueve y el piso no). Cuando yo llegue a la cinta y empiece a correr, a lo máximo que yo puedo aspirar es a recuperar esos X metros (que fueron los que usted me sacó al principio), pero ya nunca la/lo voy a alcanzar porque usted se *separó* más metros de mí.

Los metros de ventaja que usted me llevará son los que la cinta la/lo ayuda a recorrer mientras los dos vamos caminando a la misma velocidad, yo en el piso y usted en 'algo' que se mueve. Esa distancia es irrecuperable para mí.

¿Moraleja 2? *Conviene correr mientras uno va* ***sobre el piso*** para llegar más rápido a B.

Por supuesto, uno puede hacer las cuentas con más rigor y

convencerse de otras formas, pero creo que *intuitivamente* se 've' que en el primer caso es preferible atarse los cordones en la cinta, mientras que en el segundo conviene correr en el piso[32].

Apéndice

El problema fue originalmente planteado[33] por Terence Tao en el año 2008. Tao nació en julio de 1975 y fue considerado una suerte de 'niño prodigio' porque tomaba cursos de matemática de nivel universitario cuando solamente tenía 9 años. Hoy es uno de los matemáticos más reconocidos en el mundo, profesor con la máxima jerarquía en la UCLA (Universidad de California en Los Ángeles) y referente mundial en su especialidad. Fue ganador también de la Medalla Fields (equivalente al premio Nobel) en 2006.

En algún momento quiero escribir algo más sobre Tao, pero para los interesados en rastrear la incidencia genética y la del *medio ambiente* en su trayectoria, me gustaría agregar algunos datos. Sus padres son ambos de origen chino (como lo indica su apellido). El padre nació en Shanghái, en China continental, pero su trayectoria como pediatra lo llevó a Hong Kong. Su madre tuvo un gran reconocimiento como matemática y física en la HKU (Universidad de Hong-Kong) y los dos hermanos varones de Terence (Nigel y Trevor) todavía viven en Australia y representaron reiteradamente a ese país en las Olimpíadas Internacionales de Matemática.

Más allá de atarse los cordones o correr en la cinta, el debate —al menos por ahora— seguirá abierto: ¿son los genes o el medio ambiente o una mezcla de ambos, y en qué proporciones? Por ahora hay muchas preguntas, mejor dicho, muchísimas preguntas. ¿Respuestas? Pocas, muy pocas. Continuará…

32. Una propuesta de Carlos D'Andrea: ¿y si fuera *al revés*? Es decir, ¿si la cinta que se mueve estuviera al comienzo del trayecto en lugar de al final? La respuesta no debiera depender del orden aunque —quizás— la explicación necesaria sea un poco más sutil. ¿A usted qué le parece?

33. https://terrytao.wordpress.com/2008/12/09/an-airport-inspired-puzzle

Números grandes

La escena se desarrolla en la Feria del Libro de Berazategui. Muchísima gente ansiosa recorriendo los distintos stands. Después de una charla, se me acerca Daniela, una joven estudiante de primer año de una escuela de Quilmes. Viene acompañada de tres chicas a quienes —supe después— les había hecho una suerte de *apuesta*. Querían corroborar conmigo quién tenía razón. Sonríen nerviosas. "Adrián: acá tenemos un mazo con 52 cartas (contando comodines, ochos, nueves, todo…). Si las mezclamos, ¿de cuántas formas pueden quedar ordenadas las cartas? ¿Es un número *grande*?".

La pregunta es muy interesante porque pone a prueba algo que —en general— nos cuesta hacer: imaginar *números grandes*. ¿Cómo podría hacer yo para compararlo con algo que se entienda claramente?

"Miren", digo yo mientras busco en mi teléfono celular el número exacto, ya que lo tengo agendado de otra charla. "¿Tienen un papel en blanco?", me siento y me preparo a *dictarles el número*. "Anotá", y las empiezo a bombardear con estos dígitos:

80.658.175.170.943.878.571.660.636.856.403.766.975.289.505.440.883.27

"Son 68, en total", sigo yo ante la incredulidad de las cuatro. "Como se darán cuenta, yo tenía el número preparado para situaciones como la que me plantearon ustedes".

Y es así. Es un número sorprendente, a tal punto que es *casi seguro* que todas las veces que usted, yo y todas las personas que conocemos entre los dos jamás jugaron con un mazo ordenado de la misma forma. Más aún: en la historia de la humanidad, es *altamente improbable que dos mazos estuvieran mezclados de la misma forma, incluyendo todos los partidos que se jugaron hasta acá*. Y muy posiblemente lo mismo ocurra con todos los partidos que se jueguen mientras los humanos permanezcamos vivos.

Ya sé, ya sé… usted piensa que estoy exagerando, muy probablemente imagine que enloquecí. Está bien, está en su derecho. Pero déjeme proponerle una comparación que escribió Scott Czepiel,

un matemático norteamericano especialista en análisis de datos, graduado en la Universidad de Stony Brook, y que hoy trabaja en San Francisco, California. Después revisamos lo que usted pensó de mi afirmación.

Scott dice lo siguiente. Tome un cronómetro, pero piense que no lo va a usar para *medir* un tiempo hacia *adelante*. Lo utilizaremos como un *timer*, es decir, para medir un tiempo hacia *atrás*, como lo que sucede con un horno a microondas (por ejemplo): uno establece un determinado tiempo y el cronómetro *corre de forma descendente* hasta llegar a *cero*, y una alarma anuncia que el tiempo ha expirado.

Ahora, en ese cronómetro, ponga el número que escribí antes[34]:

80.658.175.170.943.878.571.660.636.856.403.766.975.289.505.440.883.27

Luego imagine que son 'segundos' y que yo voy a empezar un proceso mientras el cronómetro empieza su marcha descendente.

Hagamos así: usted elija un punto cualquiera sobre la línea del Ecuador. Cualquiera, el que le guste más. El juego consiste en caminar arriba de esa línea (la del Ecuador) llevando un ritmo muy pausado hasta dar una vuelta completa alrededor de la Tierra.

Para que nos quedemos tranquilos, la circunferencia de la Tierra a la altura del Ecuador se estima en alrededor de un poco más de cuarenta mil kilómetros[35].

Cuando esté listo, me avisa y lanzamos el cronómetro con la cuenta regresiva. Eso sí: como escribí antes, usted caminará de forma muy lenta, ya que, en realidad, no hay ningún apuro. Más aún: el objetivo es que usted disfrute del paisaje. Para ponernos de acuerdo con la velocidad, la idea es que entre paso y paso usted espere ***¡mil millones de años!*** Por las dudas, lo escribo de nuevo: entre *dos pasos que usted va a dar,* tendrán que pasar mil millones de años.

Cuando haya completado su vuelta alrededor del globo por primera vez, tome una gota del océano Pacífico, póngala en un recipiente y repita el proceso. Es decir, vuelva a dar una vuelta a la Tierra sobre el Ecuador dando un paso cada mil millones de años y, cuando termine, vuelva a meter la mano en el océano, saque otra gota y tírela en el mismo recipiente. La idea es ir extrayendo agua del océano hasta vaciarlo.

Como se estima que el océano Pacífico contiene más de 700 millones de kilómetros cúbicos de agua, el proceso le va a llevar un rato. Continúe con la misma estrategia: dar pasos (digamos de un metro por vez) esperando mil millones de años entre uno y otro, y cada vez que llega al punto del que salió, vuelve a sacar una gota (que

descarta en alguna parte). Mientras usted sigue adelante con este operativo, el cronómetro retrocede sin detenerse hasta llegar a *cero*, momento en el que usted habrá alcanzado el objetivo.

No me deje ahora porque todavía falta lo más interesante. Cuando en el océano ya no quede más agua, tome una hoja de papel cualquiera y apóyela cerca de donde está parada/o. Ni bien lo haya hecho, vuelva a llenar el Pacífico rápidamente y empiece el proceso otra vez (caminar alrededor de la Tierra sobre la línea del Ecuador con pasos que le llevan mil millones de años entre ellos, etc.). Cuando el Pacífico quede vacío por segunda vez, tome una hoja similar a la que puso antes y ubique esta *segunda* hoja arriba de la que había puesto antes. De hecho, usted va a empezar a apilar hojas del mismo tipo, una arriba de otra, formando una columna que cada vez irá tomando más altura. Como usted advierte, el proceso lleva su tiempo, y mientras tanto el cronómetro sigue corriendo.

Claro, llegará un momento en el que la pila de hojas empezará a cobrar tanta altura que usted tendrá derecho a preguntarse: "¿Hasta cuándo sigo? Digo, porque la columna de hojas se está haciendo cada vez más alta". Hagamos lo siguiente, entonces. Cuando vea que el papel acumulado con el tiempo (mientras el cronómetro retrocede) 'amenaza' con llegar al Sol[36], prepárese para ver cuánto tiempo falta para llegar a cero.

Uno sospecha que ya no debería faltar tanto. Le pido que se fije en los primeros tres *numeritos* que tenía el cronómetro antes de empezar el proceso. Como usted tenía el número anotado, me dice que lo va a buscar para ver cuáles eran. Allí es donde yo le digo que no hace falta, porque esos tres dígitos permanecen imperturbables: el 8, 0 y 6 que había originalmente, siguen estando en el mismo lugar. ¡Increíble! Es decir, se modificaron los 65 últimos, pero los primeros tres siguen *inmutables*.

Eso indica que todavía falta *muchísimo* tiempo para que el cronómetro llegue a *cero*. Para su tranquilidad, cuando la columna de papel llegue al Sol, desármela y guarde las hojas porque las va a necesitar después.

Ahora, hay que empezar con el proceso nuevamente desde el principio. Es decir, usted tendrá que volver a elegir su sitio favorito en el Ecuador y empezar con la misma travesía que lo llevó hasta acá. Más aún: cuando me mire con desazón preguntándome: "¿Una vez más todo?", yo ya tengo una respuesta preparada: "Sí, otra vez. Pero no se preocupe porque hay que repetirlo *mil veces más*. Después miramos el cronómetro y decidimos".

Aquí sí que me gustaría tener una cámara, porque su cara es

impagable.

Cuando termina de repetir esas mil veces, mira el cronómetro con asombro: ¡no puede creer que todavía *le falta* para llegar a cero! Peor: usted hace una cuenta mental y advierte que recién ahora recorrió ***un tercio*** del tiempo. Le faltan todavía dos terceras partes para que el reloj llegue a *cero*.

Acá voy a parar. La comparación de Czepiel[37] continúa con más datos que resultan entretenidos porque todavía queda *muchísimo tiempo*. Pero quiero parar porque me parece que es suficiente. El número de formas posibles de ordenar las cartas de un mazo es realmente *enorme*, y se escapa a nuestra capacidad de comprensión.

Una vez que uno toma noción de esto, se puede permitir el atrevimiento de decir que *nunca*, o mejor dicho, es *muy muy muy* improbable que en la historia de la humanidad se hayan jugado dos partidos de cartas con los naipes ordenados de la misma forma. ¿Le sigue pareciendo exagerado ahora?

Subnota

Lo extraordinario es que estos números crecen de forma muy rápida. Si hubiera nada más que dos cartas (A y B), habría solo que dos formas de ordenarlas: AB y BA.

Si hubiera tres (A, B y C), ya hay *seis* formas posibles: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB y CBA (fíjese que el resultado, 6, se obtiene multiplicando $3 \times 2 \times 1$). Es que para la primera carta hay tres posibilidades, y para cada elección de la primera hay dos posibles para la segunda, y una vez elegidas las dos primeras queda una sola 'libre'. Este número se llama '*factorial* de 3', y la notación que se usa es: $3! = 3 \times 2 \times 1$.

Si tuviéramos cuatro cartas, hay 4! (*factorial* de 4) formas de ordenarlas, y $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. Con cinco cartas (*factorial* de 5), $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. Con seis, se tiene $6! = 720$.

Dos cosas más:

a. Si hubiera *diez cartas* (haga la cuenta usted), las formas de ordenarlas ya superan las 3.600.000 (sí, más de 3 millones seiscientos mil) ya que $10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3.628.800$.
b. Como en el problema original hay 52 cartas, todos los posibles órdenes se calculan con el *factorial* de 52, o sea 52!, que es el número de 68 dígitos que escribí antes.

Otro ejemplo: piense cuántos libros tiene en su biblioteca (o en una biblioteca cualquiera). ¿Son más de diez? Si tuviera diez, nada más, y usted quisiera ordenarlos todos los días de una forma diferente, tendría que esperar 3.628.000 días hasta que esté forzado a repetir un orden anterior. Como usted advierte, eso significa casi ¡diez mil años! Le deseo suerte…

Ah, una cosa más: Daniela les ganó la apuesta: el número 52! es verdaderamente muy grande[38].

34. Por supuesto, esto es impracticable porque no hay cronómetros accesibles a nosotros, al público, que tengan tamaña cantidad de dígitos, pero supongamos que uno pudiera hacerlo.

35. La estimación más aceptada hoy es que la Tierra tiene una circunferencia, alrededor de la línea que separa los hemisferios norte y sur, de 40.075.017 metros.

36. La distancia de la Tierra al Sol se calcula en 149.597.870.691 metros.

37. El artículo (en inglés) escrito por Scott Czepiel está en czep.net/weblog/52cards.html

38. Carlos D'Andrea, además de ser el *único* de todos los betatesters que leyó *todos* los libros, artículo por artículo sin perderse 'ni una coma', me sugiere que si voy a escribir que el número 52! es muy grande, entonces ¿qué quedaría por decir de 100!? ¿O de 1.000!? Es decir, la definición de 'número grande' dependerá siempre del contexto. El resto se lo dejo a usted.

Galileo

La matemática recreativa ha tenido un impacto muy fuerte en la aparición de diferentes ramas de la propia matemática. Aquellos que hacen un estudio detallado de la historia de la ciencia ubican al siglo XV como el lugar temporal donde aparecen los primeros indicios de la Teoría de Probabilidades. Por supuesto, no es esperable que haya habido un episodio fundacional, '*un antes* y *un después*', sino que haya sido fruto de una construcción colectiva.

Diferentes variantes de juegos tuvieron una fuerte incidencia, por ejemplo, para la aparición de la Teoría de Probabilidades y más recientemente, en el siglo XX, de la Teoría de Juegos propiamente dicha. La Teoría de Probabilidades tiene sus primeros registros durante el siglo XV e involucran al científico italiano Gerolamo Cardano (1501-1576). Quiero hacer hincapié en Cardano porque aparece en la historia como físico, matemático, biólogo, químico, astrónomo, filósofo, escritor… incluso '*astrólogo*'. Es decir, Cardano sabía de *todo*, o al menos sabía de *todo lo que se sabía en ese momento.* Pero al mismo tiempo, él mismo jugaba a los dados de forma compulsiva (y obsesiva también). Su bagaje intelectual (y su curiosidad) lo llevaron a estimar qué posibilidades tenía de *ganar* cuando jugaba, de ahí que algunos de sus escritos sean reconocidos como las primeras semillas del cálculo de probabilidades.

Con el tiempo, los promotores genuinos, los que impulsaron el avance de una parte de la matemática, los que comenzaron a empujar las fronteras de una parte del conocimiento, fueron aquellos que *apostaban dinero*. Es fácil jugar para entretenerse cuando no hay nada para perder, salvo el orgullo. Pero cuando la apuesta 'cuesta', cuando empieza a 'doler', nadie quiere *jugar a ciegas*.

Así llegamos a mediados del siglo XVII. Los que jugaban 'por plata' empezaron a estimar qué es lo que más les convenía hacer ante cada situación que se les presentaba. Como no existía una *teoría* o una *estructura* del conocimiento a la que recurrir, cada uno hacía sus predicciones en función de lo que *le parecía que tenía que pasar*. Después, la única validación posible era a través de la experimentación. Si los cálculos habían sido correctos, ante los

mismos *antecedentes* tenían derecho a esperar los mismos *consecuentes*. Esa era la clave entonces (como lo es aún hoy). Si yo replico las condiciones en las que usted desarrolló su experimento, debería obtener los mismos resultados que usted. Si esto no sucede, hay *algo* que no funciona y la supuesta *teoría* queda invalidada.

Si tiro una moneda al aire, usted me creería si le digo que las chances de que salga *cara* o *ceca* son las mismas. Y lo mismo si hago rodar un dado arriba de una mesa: las chances de que aparezca un *as* o un *cinco* son las mismas (habida cuenta de que la moneda y el dado no estén 'cargados'). Sin embargo, hay un detalle que no quiero que pase inadvertido: para reconocer ambas afirmaciones como ciertas, a usted no le hizo falta apoyarse en ninguna teoría, ni saber nada de probabilidades, nada. De hecho, los *números* que miden esas probabilidades (½ y 1/6 respectivamente) son *abstracciones posteriores*. No le hacen falta para dar una respuesta.

Las contribuciones empezaron a llegar desde lugares inesperados. Los jugadores de dados seguían inventado variantes diferentes para después poder apostar. Algunos de ellos recorrían distintos pueblos y aprovechaban el conocimiento que iban adquiriendo y tomaban desprevenidos a los habitantes de cada lugar.

Ahora sí, una historia fascinante.

Uno de los juegos clásicos de la época (quizás lo sea hoy también, no lo sé) era el siguiente: se tiraban tres dados y el objetivo era apostar sobre el resultado que se obtenía al *sumarlos*. Para que pueda ponerse 'en clima' (y sin tener que *saber nada particular*), tengo una pregunta para hacerle.

Usted y yo estamos por jugar a esa variante y vamos a apostar. Antes de hacerlos rodar le propongo lo siguiente. Ponemos 100 pesos cada uno. Tiramos los tres dados. Si la suma da ***18***, gana usted. Si la suma da ***nueve***, gano yo. En el caso de obtener cualquier otro resultado, los hacemos rodar de nuevo hasta que gane alguno de los dos. ¿Usted aceptaría?

No me conteste… al menos por ahora. Tómese un instante para pensar.

Creo que advierte que hay una diferencia entre las posibilidades que tendría yo y las que tendría usted. ¿Por qué? ¿De cuántas formas pueden salir los dados para que sumen 18? De una *única forma*: *6-6-6*.

En cambio, hay seis variantes para que los tres dados sumen nueve:

1-2-6
1-3-5
1-4-4
2-2-5
2-3-4
3-3-3

Como usted ve, la suma resulta ser *nueve* en cualquiera de estos casos. Esto indica que usted está en clara desventaja. Para que usted gane (y se lleve los cien pesos que yo puse), tiene que salir una única combinación: 6-6-6. En cambio, yo ganaría con cualquiera de las seis que vimos. En todo caso, jugar 'mano a mano' implica una fuerte desventaja para usted. Una manera de *resolver* el problema sería que yo le pagara 600 pesos si los dados suman 18, y que usted me pagara solamente 100 si sale cualquiera de las seis combinaciones que suman *nueve*.

Ahora vuelvo al siglo XVII. Un grupo de apostadores paseaba por diferentes pueblos llevando (como si fuera en un circo o una kermés) el típico juego de dados: tirar *tres* y apostar dinero a los distintos números que podían ofrecer las sumas. Ya estaba claro que nadie querría apostar (al menos 'mano a mano') a que la suma fuera *tres* o *dieciocho*. Sin embargo, uno de los jugadores de ese pueblo empezó a sospechar que había algo 'raro'.

Durante varias noches seguidas, él había apostado a que la suma daría *nueve*. El apostador itinerante, el 'casino' si me permite el término, apostaba el mismo dinero a que la suma saldría *diez*. Si daba cualquier otro número, repetían el tiro.

La cuenta que hizo el jugador 'local' fue la siguiente: "Para que juguemos 'mano a mano', las posibilidades de sumar 9 o 10 deberían ser las mismas. Si no, no juego".

Y contó las posibilidades de que los tres dados sumen *nueve* y *diez*:

$$\begin{aligned}
10 &= 1+2+6 \\
10 &= 1+3+5 \\
10 &= 1+4+4 \quad (\text{¡!}) \\
10 &= 2+2+5 \\
10 &= 2+3+4 \\
10 &= 3+3+4
\end{aligned}$$

Como se ve, hay seis formas para cada número. Se quedó tranquilo y empezó a jugar. Y jugó mucho. Como a medida que pasaba el tiempo *perdía más veces que las que ganaba*, comenzó a sospechar. Lo primero que hizo fue sospechar de su suerte. ¿Tendría *tanta mala suerte*? Le pidió a su mujer y también a sus amigos, pero siempre manteniéndose 'leal': él elegía '*suma nueve*' y el visitante, '*suma diez*'.

Pero seguía perdiendo. El próximo paso fue sospechar de los dados:

“¡Claro! ¿Cómo no lo pensamos antes? Tienen que ser los dados”.

Pensando que finalmente había resuelto el problema, propuso —desafiante— que le dejaran traer *sus dados*. Y sí, lo dejaron. Igual siguió perdiendo o, por lo menos, *perdía más veces que las que ganaba*.

Ya estaba empecinado. ¿Dónde estaba el error? O en todo caso, ¿*habría algún error*? ¿No lo quiere pensar usted?

El hecho es que (y esta parte de la historia está publicada en muchos lugares, por lo que sospecho que es cierta) decidió consultar[39]. Por supuesto, en aquella época uno no le consultaba a cualquiera. Si se trata de consultar, lo hizo con el mejor. Fue y le preguntó a *Galileo*. Sí, ¡a Galileo! ¡Al mismo Galileo que conoce usted!

Obviamente, y como era esperable —si no, no sería quien era, y yo no estaría escribiendo esta historia—, Galileo le resolvió el problema. ¿Cómo hizo?

Galileo le dijo que tenía razón, que había la *misma* cantidad de formas (seis) de *sumar nueve o diez* con los tres dados, pero que había una *sutil* diferencia que en principio parece imperceptible, pero al jugar muchas veces terminaría por tener incidencia en el resultado final. Y le mostró que esas seis formas no se obtienen con la misma probabilidad.

El apostador se quedó mirándolo perplejo porque no lo entendía. Quizás usted tampoco me entiende a mí. Me explico con algunos ejemplos.

Tome *una* de las posibles formas de sumar *nueve*: 3-3-3. Para que esto suceda *los tres dados* tienen que salir iguales a *tres*. Todo bien. Pero ahora fíjese en *otro* caso que *también* suma *nueve*: *1-4-4*. Ahora *sí* hay una diferencia. Es que no hay una *única* forma de obtener 1-4-4. Como son tres dados, cualquiera de los tres es el que puede tener un ‘as’ (y los otros dos, tienen que tener un 4). O sea, hay tres formas diferentes:

1-4-4
4-1-4
4-4-1

Es decir, si bien al ‘mirar’ las caras que quedaron ‘arriba’ uno verá *un 1* y *dos 4*, hay tres maneras distintas de que esto suceda, y eso va a depender en cuál de los tres dados aparezca el *1*.

Otro ejemplo. Contemos juntos las formas en las que se puede obtener la combinación 1-2-6. ¿Cuántos habrá en este caso?

1-2-6
1-6-2

(2*)-6
2-6-1
6-1-2
6-2-1

O sea, en esta situación, cuando los tres dados son distintos (1, 2 y 6), *hay seis* formas de que aparezcan.

(Si estuviera cerca suyo, le pediría que no avance si no me pudo seguir. Lea nuevamente el texto hasta convencerse de que usted *aprueba* lo que escribí. Si no, vuelva a leer y discútalo. Esta es justamente *la única parte importante* del razonamiento. El resto, lo que queda de la argumentación, es como si fuéramos 'en bajada', sin siquiera tener que apretar el acelerador. Lo único que hay que entender está en el argumento que acabo de escribir).

Sigamos. Creo que ahora estamos en condiciones (usted y yo) en entender *qué es lo que pasaba* y poder explicar por qué el apostador local perdía frente al itinerante más veces que las que ganaba. En principio, como cada dado puede salir de seis formas diferentes, y son *independientes*, entonces hay: $6 \times 6 \times 6 = 256$ resultados posibles.

Contemos cuántas de ellas suman *nueve* y cuántas suman *diez*. Estas son las seis formas en la que pueden salir los dados y sumar nueve (como vimos en (*), página 116):

1. $9 = 1 + 2 + 6$
2. $9 = 1 + 3 + 5$
3. $9 = 1 + 4 + 4$
4. $9 = 2 + 2 + 5$
5. $9 = 2 + 3 + 4$
6. $9 = 3 + 3 + 3$

Por otro lado, tomemos el primer caso. En (**), página 118, vimos que los dados suman nueve de *seis formas diferentes* para 1-2-6:

1-2-6
1-6-2
2-1-6
2-6-1
6-1-2
6-2-1

Lo mismo va a suceder en cualquier caso formado por tres números diferentes. Otro ejemplo: para la combinación 1-3-5, tenemos:

1-3-5
1-5-3

3-1-5
3-5-1
5-1-3
5-3-1

Ahora, contemos de cuántas formas se puede obtener 1-4-4. En este caso, hay que mirar en cuál de los dados está el número 1. Los casos son:

1-4-4
4-1-4
4-4-1

Es decir, tres formas. Cuando hay dos números iguales y uno distinto, en total hay tres maneras. Ahora voy un poco más rápido. El caso 2-2-5, también se puede obtener de tres formas (usando los mismos argumentos). Para el quinto caso, que otra vez presenta tres dados diferentes (2-3-4), hay seis maneras (ahora no escribo, creo que usted puede hacerlo por su cuenta). El último caso es distinto, hay una *única* forma de obtener 3-3-3.

En definitiva, y resumiendo todo lo que vimos, en total hay

$$(6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1) = \textbf{25 formas diferentes}$$

El último punto será contar de cuántas formas se puede sumar diez. Las seis maneras diferentes son:

1. $10 = 1 + 3 + 6$
2. $10 = 1 + 4 + 5$
3. $10 = 2 + 2 + 6$
4. $10 = 2 + 3 + 5$
5. $10 = 2 + 4 + 4$
6. $10 = 3 + 3 + 4$

Tal como hicimos antes, ahora será fácil hacer la cuenta. Tenemos que sumar:

$$(6 + 6 + 3 + 6 + 3 + 3) = 27$$

Esto indica que hay ¡***27 formas diferentes de sumar 10****, mientras que hay* ***solamente 25 de sumar 9***!

Esa *pequeña/sutil* diferencia era la que inclinaba la balanza (y el dinero) a favor del apostador visitante… y terminó develando el

misterio.

Galileo pudo. Y creo que usted también. ¿Habrá ido a la escuela pública Galileo?

39. “Sopra le scoperte dei dadi”, Galileo Galilei, Opere, Firenze, Barbera, 8 (1898), pp. 591-594. Hay una versión en inglés en www.leidenuniv.nl/fsw/verduin/stathist/galileo.htm

Saberes

"La gente incompetente suele no estar advertida de su incompetencia, y parte de la explicación es que la habilidad que se requiere para ser considerado 'competente' es justamente la habilidad que uno necesita para reconocer su propia incompetencia. Esa es la razón por la cual los políticos más alejados de la realidad son los que se exhiben tan autosuficientes y superficiales en sus análisis. Muy frecuentemente, en política, economía, religión y aun en la vida cotidiana, el conocimiento y la duda tienen que dar una batalla contra la ignorancia y la certeza".[40]

Hace pocos días, a propósito de una conferencia dedicada al 'conocimiento', me encontré envuelto en una discusión sobre un tema del cual no solo no tengo idea, sino al que nunca le dediqué ningún tiempo para pensar. Pero como siento que me sirvió haber participado de toda esa interacción, quiero comunicarla y ofrecérsela a usted también. Dicho esto, no espere leer ningún *ensayo* ni nada que tenga el rigor suficiente para ser publicado en una revista especializada. No. Me sentiría muy satisfecho si logro transmitirle '*una idea*', *algo* que no había pensado antes. Acá voy.

Usted, como yo, debe tener algún tema que la/lo apasiona. 'Algo' que, si tuviera el dinero y el tiempo para dedicarle, podría hacer todos los días de su vida. No piense en nada sofisticado… no hace falta. Su tema podría ser el tango o los videojuegos, la pintura o el hockey sobre patines, la cocina o el diseño de algoritmos; podría dedicarse a la antropología o a conducir un taxi, a la biología molecular o a cazar de jabalíes, no interesa… Solo importa saber que usted sienta que es *potente en ese tema o habilidad o destreza*.

Me imagino que Martha Argerich elegiría las obras de Chopin o Rachmaninoff e intuyo que Lionel Messi haría lo mismo con el fútbol, pero seguramente me equivoco porque no los conozco personalmente, como quizás se equivocaría usted si no contestara que Alberto Kornblihtt[41] elegiría el cine o la cocina, y Víctor Hugo Morales[42], la ópera o el teatro popular.

Pero si bien me desvié, como me suele pasar, creo que le di una idea aproximada de lo que quiero establecer.

Ahora sí, avanzo en lo que quería. Lo que sigue es una *división* de los *saberes* de una persona. Los voy a separar en *cuatro* categorías.

Parte 1. Saberes que usted *sabe* que tiene

Esta parte del conocimiento incluye *todo* lo que usted *sabe que sabe*. En esta bolsa están incluidos todos los saberes que usted fue incorporando con el paso del tiempo. Es lo que le da la *potencia* y le permitió decir que usted es *un/a experto/a* en ese área. Son los *saberes* que uno *sabe* que tiene.

Parte 2. Saberes que usted *sabe* que *no* tiene

Usted *sabe* que, aun en *su tema*, hay muchísimas cosas que *no sabe*. Son *saberes accesibles*, pero usted sabe que no los posee. Claramente es imposible abarcar *todo* lo que se *sabe* sobre cualquier tópico. Pero la diferencia, no menor, es que si usted quisiera (y tuviera el tiempo y los medios), sabría dónde están, cuáles son y —eventualmente— podría *aprenderlos*. Es posible que, aunque le dedicara el resto de su vida, no alcance a incorporarlos todos, pero está claro que usted *sabe* cuáles son… ¡están *ahí*! Además, independientemente de cuál sea el tema que eligió, estoy seguro de que todos los días aparecerá *tanta cosa nueva* que sería imposible incorporar todo… casi como caminar hacia una meta que se mueve constantemente. En resumen: son *saberes* que uno *sabe que no posee*.

Parte 3. *Saberes* que usted *no sabe* que tiene

Sí, parece raro. Sin embargo, le propongo que haga un mínimo esfuerzo y descubrirá que, en su vida, alguien le debe haber planteado alguna vez algún problema que usted logró resolver sin *saber* que podía. Es decir, se sorprendió a usted misma/mismo con *saberes* que usted tenía y que *no sabía que tenía*. Son *saberes* que están *dormidos* o tapados en algún lugar de su conciencia.

En resumen, son *saberes* que *uno posee, pero que no lo sabe*. Son cosas que uno *no sabe que sabe*.

Y aquí, una pausa. Llegó el momento de hablar/escribir de la cuarta y última categoría, que es la que disparó la discusión de la que escribí antes, la que —me parece— más debería importar.

Parte 4. *Saberes* que usted *no sabe* que *no tiene*

Este es el punto crucial y que me interesa enfatizar. En general, creo que uno tiene más o menos claro qué es lo que sabe. Creo que es fácil de aceptar (en cualquier área del conocimiento) que hay muchísimas cosas que uno no sabe, aun de la profesión u oficio o hobby al que le dedica o ha dedicado muchísimo tiempo. Estoy casi seguro de que usted también logró pensar en alguna situación en la que logró resolver un problema o contestar alguna pregunta que terminó sorprendiéndola/lo a usted misma/o porque no sabía que tenía ese 'saber'. Pero ¿*saberes* que uno ni siquiera *sabe que existen*?

¿Qué le genera a usted esta última categoría? Quizás ya lo ha pensado, y estas reflexiones (que *no son exclusivamente mías*) no le agregaron nada que no supiera de antemano, pero a mí me despertó *algo* que no sé definir bien. Lo primero que se me ocurre es que debería ponernos en un lugar de *muchísima mayor humildad* con respecto al conocimiento, a la posición en la que uno *cree* que está. Pero no sé si estoy conforme con 'humildad'. ¿Servirá decir que es una prueba 'antiarrogancia'?

Bertrand Russell escribió alguna vez: "El problema en el mundo es que los estúpidos *[sic]* son arrogantemente seguros, mientras que los inteligentes *[sic]* están llenos de dudas". Charles Darwin hizo su aporte hace más de ciento cincuenta años cuando señaló: "La ignorancia genera más confianza que el conocimiento".

Sucede entonces que una persona que ignora lo que ignora ni siquiera *detecta* lo que no sabe. Siendo generosos, no es que niegue la tal *ignorancia*, sino que son 'baches' en su conocimiento, 'huecos' en su formación. Ni siquiera sabe que existe lo que ignora o, puesto de otra forma (y *no es* un juego de palabras), ignora que ignora lo que ignora.

Cuanto más ignora una persona en un área cualquiera, menos capacitada está para detectar el desconocimiento de otra/o en ese mismo tópico y, en particular, las fallas o 'baches' propios.

Una reflexión más: entre las categorías en las que está dividido el *conocimiento* o los *saberes* potenciales de una persona, omití hablar (a propósito) de una categoría más pero que no entraría acá. Me refiero a todo lo que uno *cree que sabe… ¡pero que está mal o está equivocado!*

¿Y ahora? ¿Cómo seguir? No. Esa parte le toca a usted. En soledad.

40. Traducción libre mía de un segmento extractado de un muy celebrado artículo sobre 'incompetencia' publicado en 1999 por Justin Kruger y David Dunning, psicólogos y profesores en la Universidad de Cornell, Estados Unidos.

Basado también en un artículo que escribió en marzo de 2006 Alan Bellows, director de la publicación *Damn Interesting*.

41. es.wikipedia.org/wiki/Alberto_Kornblihtt
42. es.wikipedia.org/wiki/Víctor_Hugo_Morales

Dos joyitas

Dos problemas preciosos. En principio, creo que no hace falta siquiera tener para anotar. Si necesita escribir, hágalo, por supuesto, pero estoy seguro de que debería poder resolverlos mentalmente.

Acá van.

1. Yo le doy nueve monedas de un peso. Son todas verdaderas, salvo una, que pesa un poco menos. Usted tiene que decidir cuál es la moneda falsa. Estas son las condiciones. Tiene una balanza con dos platillos que podrá usar nada más que *dos* veces. La idea es diseñar una estrategia que le permita distinguir la moneda que pesa menos.
2. Los números *naturales* son los primeros números con los que nos tropezamos cuando somos niños: 1, 2, 3, 4… son aquellos con los que empezamos a contar. Para eso, usamos los diez dedos de las manos. Después aparece el cero, una abstracción que a la humanidad le llevó mucho tiempo definir y aceptar. Un poco más adelante, surgen los números *negativo*s (las deudas): -1, -2, -3, -4, -5…

Después, les pusimos un nombre: al conjunto de números que incluye a los naturales, al cero y a los negativos lo llamamos 'conjunto de los *números enteros*'.

Ahora viene el problema. En un papel yo tengo anotada una cantidad X de números enteros *consecutivos*. El menor es (-32). O sea, (-32) es el más chico de todos.

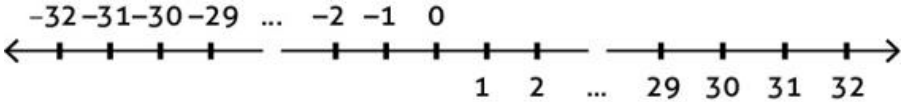
La suma de todos resulta ser 67.[43] ¿Cuál es X? O dicho de otra manera, ¿cuántos números tengo anotados en mi papel?

Como siempre, tómese tiempo. Si no puede dedicarle un rato ahora, déjelo para después. Disfrútelo. ¿Qué apuro hay? ¿Quién mira? ¿Quién juzga? ¿A quién le importa?[44]

1. Elija seis de las nueve monedas y ponga tres en cada platillo. Pueden suceder dos cosas: o bien los dos platillos marcan igual, en cuyo caso la moneda falsa está entre las tres que quedaron afuera; o bien alguno de los dos platillos pesa menos.
   Si los dos platillos están igualados, elija dos de las monedas que usted no incluyó en la primera pesada. Ponga una en cada platillo. Si pesan lo mismo, la moneda que quedó afuera es la moneda falsa. Si no, alguno de los dos platillos tiene que pesar menos. Ese es el que contiene la moneda falsa. Esto resuelve la primera situación posible en la cual, al pesar las primeras seis monedas, los dos platillos resultaban igualados. Con dos pesadas, encontramos la moneda que pesaba menos.
   La segunda posibilidad es que, al elegir las seis monedas y poner tres en cada platillo, haya uno de los dos que pese 'menos'. Me imagino que usted ya sabe cómo seguir, ¿no es así? Es que estamos en la situación anterior. ¿Por qué? Quite las tres monedas del platillo que pesa más. Tome las tres monedas del platillo que pesa menos. *Seguro* que entre ellas *está* la moneda falsa. Una vez más, como hicimos antes, elija dos cualesquiera y ponga una en cada platillo. Si alguno pesa menos, ese contiene la moneda falsa. Si pesan lo mismo, la falsa es la que quedó afuera. ¡Y listo!
2. Estamos un poco menos acostumbrados a pensar problemas de este tipo, pero verá que es mucho más sencillo de lo que parece. Separo los tres datos importantes para que veamos cómo relacionarlos.
   a. El más chico de los números es (-32).
   b. Como son consecutivos, la lista que yo tengo en el papel tiene que empezar así: (-32), (-31), (-30), (-29), (-28)…
      ¿Entiende por qué? El número (-32) es *más chico* que (-31) y, a su vez, (-32) y (-31) son más chicos que (-30), y así siguiendo. Todavía no sabemos hasta dónde llega la lista (porque desconocemos el valor de X), pero sabemos que *tiene* que empezar así: -32, -31, -30, -29, -28…
   c. El otro dato importante (y que no usamos todavía) es que la *suma* de todos es 67. ¿Qué se deduce de esto? Como la suma de todos los números resulta un número *positivo* esto significa que los números que tengo anotados ¡no pueden ser todos negativos! (si no, la suma sería negativa). Para

que la suma sea positiva, tengo que *cancelar* la suma de todos los negativos (algo así como *pagar* todas las deudas) y todavía seguir con algunos positivos hasta llegar a sumar 67. ¿Qué hacer?

Creo que ahora usted está en condiciones de seguir por su cuenta, pero igualmente avanzo. Imagine que los números están todos anotados en una 'recta':



Como los números son *consecutivos*, fíjese que puedo ir cancelándolos de a pares. Es decir, si la lista empieza con (-32), (-31), (-30), (-29), (-28)... y sabemos que tiene que atravesar la barrera del cero y llegar a incluir positivos hasta sumar 67, entonces alcanzará con poner *todos* los positivos que sirvan para anular a los negativos del otro lado. ¿Qué quiero decir con esto?

Como está el (-32), del otro lado tendré que llegar hasta el $(+32)$. Por supuesto, la suma de (-32) y $(+32)$ resulta ser cero. De la misma forma, como está el (-31) y también aparecerá el $(+31)$, la suma de esos dos *también* resultará cero. Es decir: todos los negativos que están en la lista se van a compensar con los positivos que están del otro lado.

Luego, la lista contendrá los 32 números negativos: -32, -31, -30, -29, -28, ... , -3, -2 y -1. Por otro lado, va a contener también los equivalentes positivos: 1, 2, 3, ... , 28, 29, 30, 31 y 32. Hasta acá, tendríamos 64 números (que en total, suman *cero*).

Pero todavía no terminamos. ¿Por qué? Primero, porque *falta* el número *cero*. Como los números de la lista son *consecutivos*, lo tengo que incluir para poder 'cruzar' al otro lado. Hasta acá hay 65 números. Pero si terminara allí, la suma no daría 67 sino que sumaría *cero*. ¿Qué hacer?

Fíjese que hasta acá el número más grande es 32. Si agrego dos más, 33 y 34, ahora sí, la suma dará 67 (ya que $33 + 34 = 67$). ¿Y cuántos números hay en total? Había 65 desde el (-32) hasta el $(+32)$, y ahora agregué dos más. En total hay 67 números. Hemos descubierto entonces que $X = 67$. Listo.

Una última reflexión. Yo miro todo lo que tuve que escribir para el segundo problema y me asusto. Sin embargo, le propongo que no deje

que la/lo confunda con mi argumentación. Observe la 'porción de recta' que aparece en la página anterior y se dará cuenta de que el argumento 'visual' es contundente, sencillo y mucho más económico.

43. Preguntas que quedan pendientes y que le propongo que piense: a) ¿Es casualidad que hayan sido 67 números y que la suma sea 67? Por ejemplo, si la suma diera 69, ¿cuántos números consecutivos darán ese resultado? Desde ya, me apuro a contestar que (34 + 35) = 69, y son nada más que dos números. Pero también hubiera sido cierto que (33 + 34) = 67, y no hicieron falta 67 números. Esto invita a pensar algo más: b) Si yo le hubiera dicho *solamente* que la suma de ciertos números enteros consecutivos resultó ser 67, ¿cuántas soluciones hay?; c) ¿se podrá poner *cualquier número* como resultado potencial de la suma de números enteros consecutivos? Por supuesto, excluya el caso —trivial— en donde hay *nada más que* ***un*** *solo número*. Estoy convencido de que a usted se le ocurrirán *otras* preguntas más. ¿Por qué no avanzar en la dirección que *usted* prefiera buscando contestar las preguntas que a *usted* le surgieron?

44. El problema de las monedas lo propuso hace más de medio siglo Martin Gardner, el mejor comunicador de la matemática recreativa de la historia. El segundo, lo vi en una competencia de matemática que se realizó en Texas en el año 2014.

45. En realidad, debería escribir que las respuestas que siguen son 'algunas' de las posibles y *no* 'las' respuestas, como si no pudiera haber otras.

Bueno… una joyita más

Este es un problema de enunciado muy sencillo, pero para encontrar la solución hace falta diseñar una estrategia. De eso se trata: ser capaz de elaborar un *plan* que permita conseguir un objetivo. Me explico.

Suponga que yo traigo seis monedas. Estas monedas pesan 1, 2, 3, 4, 5 y 6 gramos respectivamente. En apariencia son iguales, salvo que cada una tiene una 'etiqueta' que en teoría identifica su peso.

Al mismo tiempo, le ofrezco una balanza clásica, con dos platillos. Puede que cada moneda tenga la etiqueta que le corresponde… o no. Es decir, cada etiqueta tiene un número que 'debería' identificar el peso de la moneda, pero puede que las etiquetas hayan sido *mal distribuidas*.

La pregunta, entonces, es la siguiente: ¿es posible diseñar una estrategia que permita determinar si *todas* las etiquetas están bien ubicadas usando nada más que dos pesadas?

Como usted advierte, el problema *no puede ser complicado*. Del enunciado mismo se deduce que solo se trata de *prueba y error*. Fíjese que no importa cuál o cuántas están equivocadas; el problema solamente pide decir si las etiquetas están *todas* correctamente ubicadas o no. Basta que haya dos en una mala posición para concluir que '*no todas están bien*'.

Le sugiero, entonces, que no mire lo que escribí a continuación y se dé el tiempo que necesite para contestar la pregunta: ¿se puede o no se puede? Y si se puede… ¿cómo hacer?

Solución

Supongo que debe haber varias soluciones a este problema. Yo voy a proponer una potencial estrategia para encontrar la respuesta. Veamos.

En la primera pesada, tome las monedas (1, 2, 3) y póngalas en un platillo. Del otro lado, ponga la moneda que lleva la etiqueta número 6. Pueden pasar dos cosas: los platillos están alineados o bien no lo

están.

Vayamos por pasos. El problema queda resuelto inmediatamente si la balanza no está 'igualada'. Eso indica que algunas etiquetas (o todas) tienen que estar mal, ya que (1 + 2 + 3) = 6, y si al pesarlas de la forma en que indiqué antes no se obtiene una igualdad, entonces las etiquetas están equivocadas. Se terminó el análisis y hemos llegado a la respuesta: las etiquetas están mal.

Supongamos que sí, que resultan estar igualados. ¿Se podrá concluir que están todas las etiquetas bien ubicadas? ¿Quiere pensar usted? La respuesta es que no: bien podría pasar que al pesarlas diera igual, pero que la etiqueta 1 y la etiqueta 3 estuvieran intercambiadas, y con esta única pesada no nos daríamos cuenta.

Sin embargo, *sí* hay un dato que podemos extraer de la igualdad. La etiqueta número 6 *sí* tiene que estar bien ubicada. Si no, no hay forma de que, con una sola moneda en un platillo, la suma de ningún grupo de *tres monedas* pueda igualar el peso (le pido que piense usted las razones por las que esto es cierto: pruebe todos los casos, si hace falta, y verá que tengo razón).

Es decir, si (1, 2, 3) pesan lo mismo que 6, se deducen tres hechos (y fíjese si usted está de acuerdo):

a. la moneda 6 tiene la etiqueta correcta;
b. puede ser que las monedas (1, 2, 3) estén todas bien. Si no es así, tienen a lo sumo las etiquetas intercambiadas entre ellas (si no, la suma de las tres no podría dar 6);
c. por la misma razón, puede suceder que las monedas (4, 5) tengan las etiquetas correctas o también estén intercambiadas entre ellas.

Estas tres afirmaciones son importantes para ver cómo hacer con la segunda pesada.

Ahora, tome las monedas (1, 6) y póngalas en el platillo de la izquierda, y en el otro coloque las monedas (3, 5).

Acompáñeme por este camino: si *todas las etiquetas estuvieran donde corresponde*, el platillo que tiene las monedas (1, 6) tiene que pesar *menos* que el platillo que tiene (3, 5) (de un lado pesan *siete gramos* y del otro *ocho*). Pero lo curioso es que ¡*este es el único caso en el que es posible que (1, 6) pesen menos que (3, 5)*! Es decir, cualquier *cambio* en las etiquetas impide que el platillo (1, 6) pese *menos* que (3, 5). ¿Por qué?

Ya sabemos que la etiqueta 6 está en el lugar correcto (por lo que vimos en la primera pesada). Luego, la única que puede estar 'mal' es

la ‘1’. Pero ‘1’ solamente puede tomar los valores ‘2’ o ‘3’. Si ‘1’ tomara el valor ‘2’, entonces el platillo de la izquierda pesaría *ocho gramos*, y el platillo de la derecha pesa —por lo menos— lo mismo. ¿Por qué? Es que, en ese caso, la etiqueta ‘3’ está en el lugar correcto (ya que ‘1’ y ‘2’ cambiaron de lugar, lo que obliga a que ‘3’ esté en la moneda que le corresponde), y las únicas alternativas para ‘5’ son que pese lo que indica la etiqueta (cinco gramos) o bien que pese *cuatro*. En cualquiera de los dos casos, el platillo que tiene (3, 5) pesa igual o *menos* que el platillo (1, 6).

Esto sucedió si las monedas ‘1’ y ‘2’ tenían intercambiadas las etiquetas. El *último* caso que queda por analizar es si la moneda que dice ‘1’ pesa tres gramos. En ese caso, el platillo de la izquierda (el que tiene (1, 6)), pesa nueve gramos. El de la derecha está forzado a pesar *menos*, ya que ‘3’ ya no puede estar bien (y tiene que pesar *menos*) y ‘5’ pesa cinco o cuatro. En cualquier caso, el platillo que tiene (3, 5) no puede llegar a nueve.

Moraleja

La única forma de que el platillo que tiene (1, 6) pese ***menos*** *que el platillo que tiene (3, 5) es que las cuatro etiquetas estén ubicadas correctamente.*

Y ahora, fíjese que las dos etiquetas que quedan —(2, 4)— forzosamente indican el peso de las monedas de manera correcta, porque ‘2’ no podría cambiar sino con ‘1’ o ‘3’ (que están bien), y ‘4’ solamente podría intercambiar con ‘5’, por lo que también está obligada a indicar lo que corresponde.

De todo esto se concluye que si en la segunda pesada el platillo que tiene (1, 6) pesa *menos* que el platillo que tiene (3, 5), entonces ***todas*** las etiquetas están dispuestas de forma correcta, mientras que si (1, 6) pesan igual (o más) que (3, 5), entonces algunas[46] de las etiquetas (o todas) están equivocadas. Y esto termina el problema.

46. Escribo ‘algunas’ y no ‘alguna’ porque no puede haber *una sola etiqueta equivocada*. Si hay una errónea, esto obliga a que haya—por lo menos— otra que también esté indicando un peso equivocado.

Dilema ético

El que sigue es un artículo interactivo. Quiero plantear una serie de situaciones (no de matemática, sino de la vida cotidiana) que requieren de la toma de decisiones. Las opiniones van a variar: la suya, la mía, la de cada persona podría (y es esperable que así ocurra) ser diferente, pero como tendremos que elegir algún camino, deberíamos consensuar en qué sociedad queremos vivir. Naturalmente, convendría que sea aquella en la que se respeten las voluntades de las mayorías.

Sé que así escrito es muy general o muy genérico, pero si sigue leyendo entenderá un poco más.

Le voy a plantear una serie de problemas en los que usted tendrá que tomar una decisión de forma casi instantánea. No se apure a contestar; le pido que medite qué haría y verá por qué su respuesta no solo le interesará a usted, sino que nos interesará a todos.

Acá voy.

Problema 1

Usted está manejando su auto una velocidad considerable. De pronto, sin darle virtualmente tiempo a nada, desde la vereda salen corriendo unas diez personas. Su primera reacción es 'clavar los frenos', pero, cuando lo intenta, su pie derecho llega hasta el fondo sin que haya respuesta. Con horror usted descubre que 'se quedó sin frenos'.

Todo sucede muy rápido: sin tiempo, mira hacia la misma vereda desde donde salieron los peatones que ahora están cruzando y alcanza a ver a un joven que está parado, como si estuviera esperando un colectivo.

Hay dos alternativas: o atropella a los que están cruzando (y eventualmente los mata) o bien tuerce el volante hacia la derecha y 'mata' al joven que está parado en la vereda.

¿Usted qué haría? ¿Sigue su camino y mata a las diez personas que están cruzando o gira el volante y mata a uno solo?

Problema 2

Mismo problema que antes, solo que ahora no hay nadie parado en la vereda: si gira el volante, será usted quien terminará estrellado contra la pared.

¿Ahora qué hace? ¿Sigue su camino y eventualmente mata a todas o a algunas de las personas que cruzan, o pone en riesgo su vida con alta probabilidad de perderla?

Problema 3

Lo mismo que en los casos anteriores: usted viene manejando su auto a alta velocidad. Ahora es una única persona la que cruza de forma totalmente inesperada. Una vez más, usted descubre con horror que 'se quedó sin frenos'. Con desesperación, mira hacia todos lados y decide de inmediato que las alternativas son dos: si usted sigue de largo, muere el que está cruzando y usted se salva. Si gira hacia la derecha, igual que antes, es usted quien se estrella contra la pared. En esta situación, ¿qué haría?

Es posible que haya escuchado hablar de este tipo de situaciones o que haya leído sobre ellas. No son las únicas, y ni siquiera sé si son las mejores. No importa. Espero que ni usted, ni yo ni nadie tenga que atravesar por ellas. Pero lamentablemente la vida es así: ese tipo de cosas pasan y, guste o no, los accidentes existen.

De todas formas, no es esa la razón por la que estoy escribiendo este artículo, sino que quiero proponerle avanzar en una dirección distinta, siempre contemplando las condiciones que planteé antes.

Más allá de las respuestas que usted (se) dio, quiero introducir un nuevo elemento.

Suponga que ahora usted está viajando en el auto, pero no lo está conduciendo. Viaja como pasajero. En realidad, no hay piloto, no hay quien lo conduzca. Se trata de uno de los vehículos nuevos con los que Google está experimentando desde hace algunos años… y con marcado éxito. Ahora ya no es usted quien tiene que tomar la decisión: ¡es el auto!

Estoy seguro de que usted no ignora que los autos no toman decisiones; las tomamos los humanos. El auto va a hacer exactamente lo que hayamos programado que haga. Acá quería llegar.

1. ¿Qué le decimos que haga?
2. ¿Quién toma la decisión de elegir matar a diez peatones pero salvar a usted o a los que viajan en el auto?

3. ¿O quién toma la decisión de matar al que está parado en la esquina pero salvar a los diez que están cruzando?
4. ¿O la de que el auto mate al que está parado pero lo salve a usted o a los que estén viajando en el vehículo?

Una vez más, hay que programar la computadora del auto antes de que salga a circular. De hecho, una vez que se ponga en venta, algo va a hacer; no importa qué, pero seguro que algo hará. ¿Y entonces? ¿Qué le decimos que haga? ¿Y quién se lo dice? ¿Quién o quiénes toman las decisiones para que cada auto tenga instrucciones precisas sobre cómo operar en cada circunstancia?

¿Dejamos que lo decidan los fabricantes de autos? ¿No tendría que estar regulado? ¿No debería ser una decisión de los gobiernos? ¿Habrá acaso libertad para fabricar autos que tomen una decisión determinada y otros que tomen una distinta?

Supongo que no aspirará a que yo le ofrezca 'la' respuesta, ni siquiera 'una' respuesta. Yo mismo no sé bien lo que pienso y ni siquiera creo que sea relevante. Pero está claro que en algún momento (y no muy lejano) estas preguntas éticas tendrán que ser contestadas, y esas respuestas necesitarán del consenso de la sociedad en la que vivimos. Sospecho que en la Argentina las decisiones serán distintas de las que se tomarán en Suecia, por elegir un lugar cualquiera. Lo que me queda clarísimo es que no puede quedar en manos de los fabricantes.

Me imagino que debería haber un debate parlamentario para consensuar leyes que determinen qué pedir o qué exigir. ¿O es que la decisión puede ser tomada por el comprador, quien tendría la opción de elegir, por ejemplo, uno que 'mate' a los que cruzan si son más —en número— que los que están parados esperando un colectivo? ¿Y qué hacer si, en lugar de un auto, se trata de un colectivo que transporta niños? ¿Y si quien está esperando el colectivo es un niño? Y si en el auto que se está 'automanejando', además de usted, están sus dos hijos, ¿elegiría igual lo que eligió antes?

Las preguntas que yo podría agregar acá son muchas y a esta altura creo que son redundantes. Estoy seguro de que usted advierte qué problema estamos por enfrentar. Si le sirve, me apresuro a decirle que, más allá de que no 'le' guste pensar las respuestas, o no 'me' guste hacerlo, este tipo de debates están 'acá a la vuelta'. Los autos sin conductor empezarán a circular en menos de una década, o mucho antes, y si usted decide no comprar ni subirse a ninguno, salvo que se prohíba su circulación, es muy posible que tenga que coexistir con ellos.

Hay varios lugares en los que este tipo de debates ya existen. De hecho, el sábado 4 de junio de 2016, en el marco del Festival Mundial de Ciencia que se hizo en New York, una de las charlas tenía este título: “Moral Math of Robots: Can Life and Death Decisions be Coded?”. Voy a tratar de ofrecer mi traducción, no necesariamente textual: “La moral matemática de los robots: ¿se pueden programas decisiones sobre la vida y la muerte?”.

Este es solamente uno de los foros en los que se discutió. Claramente se trató de la presentación en sociedad de este problema, lo mismo que pretendo hacer yo con este artículo.

Eso sí: ignorar el problema no lo resuelve. Conviene estar educados para enfrentar el futuro que llega inexorablemente. ¿Usted qué piensa?

Escala

Tengo un par de problemas breves para plantearle. Son situaciones de la vida cotidiana. Fíjese qué haría usted si tuviera que decidir.

1) En la esquina de su casa están por abrir una nueva pizzería. Los dueños son un matrimonio joven, amigos suyos de la infancia, y necesitan de su ayuda. Le muestran el menú y le piden un consejo. Lo *único* que les falta es poner los precios y, como tienen una disputa entre ellos (marido y mujer), decidieron consultarle. Este es el problema que le plantearon: Todas las pizzas del menú aparecen en dos medidas... chica y grande. Son todas *redondas* (o circulares). Las chicas tienen 20 centímetros de diámetro y las grandes miden el doble (de diámetro): 40 centímetros.

Después de haber hecho todos los cálculos, ellos dicen saber qué precio cobrar por las pizzas chicas, pero la disputa es con el valor de las grandes. La señora quiere convencer al marido de que está equivocado no solo respecto de los precios, sino también en la estimación de los ingredientes que necesitan para las pizzas más grandes. Y acá es donde quisiera hacerle yo una pregunta en un caso particular.

Suponga que deciden cobrar 100 pesos la pizza chica de jamón y muzzarella. Aceptando como cierto que quieren conservar la calidad de la pizza grande poniendo la cantidad de ingredientes que correspondan cuando se duplica el diámetro, ¿a qué precio tendrían que vender la pizza grande?

¿Y qué hacer con los ingredientes? La señora está enojada con el marido porque ella sostiene que no será suficiente *duplicar* los ingredientes para conservar la calidad… ¿Quién tiene razón en este caso y por qué?

2) Mientras sigue discutiendo con ellos la solución que les aportó, deciden caminar hacia la pizzería para seguir la conversación. Lo que usted no había advertido es que en la misma cuadra habían abierto una nueva rotisería. El lugar parece moderno porque desde afuera,

desde la calle, se puede ver parte de la cocina.

De hecho, los tres se detuvieron y vieron con claridad lo que sucedía con las dos sartenes en las que se estaban friendo albóndigas de carne. En una de ellas las albóndigas eran chiquitas, como si fueran pelotitas de ping-pong; en la otra, las albóndigas eran más grandes, parecidas a pelotitas de tenis. Si alguien le hubiera pedido que estimara el tamaño de cada una, usted habría dicho que las más pequeñas eran de *un centímetro de diámetro* y las más grandes tenían *tres centímetros de diámetro*, algo así como el triple de las otras.

Con todo, lo que más les llamó la atención a los tres fue un cartel con una promoción: por el mismo precio, usted podía comprar *cuarenta* de las albóndigas pequeñas o bien *dos* de las grandes. Leyó bien: cuarenta de las chicas o dos de las grandes.

¿Qué le convendría hacer? ¿Cuál de las dos opciones es la más conveniente? ¿O da lo mismo? Si usted estuviera en esta situación (ideal, por cierto), ¿qué haría?

Ahora es *su* turno.

Ideas

Por un momento, imagine que se enfrenta con la réplica de un auto de carrera o de la locomotora de un tren eléctrico. Si las versiones fueran *fieles a la realidad* y usted pudiera *inflarlos* o *ampliarlos* en todas las direcciones posibles, debería obtener una copia de los originales.

También está claro que si quisiera pintar el objeto en miniatura, usaría una cantidad de pintura mucho menor que si tuviera que pintar el original. Y lo mismo sucede con el volumen. Hasta acá —creo— estamos de acuerdo, pero las preguntas son: *¿En cuánto se modifica? ¿Cómo se mide esa diferencia? ¿Qué sucede con las superficies y los volúmenes cuando uno modifica la escala?*

Los problemas que planteé anteriormente son dos casos particulares de lo que acabo de describir. Se trata de decidir en cuánto aumenta la superficie de la pizza si duplico el diámetro, y de estimar la cantidad de carne que se usa en cuarenta de las albóndigas chicas en comparación con las dos albóndigas grandes.

Ahora, acompáñeme por acá. No va a resolver ninguno de los dos problemas originales pero, conceptualmente, sí. Suponga que usted está dentro de una habitación que mide (1×1), o sea, un metro de ancho por un metro de largo. La superficie de ese lugar es, entonces, *un metro cuadrado*. Fíjese lo que sucede si usted *duplica* cada lado. La habitación se transforma en una de (2×2). A usted no se le escapa, entonces, que la superficie del lugar es ahora ¡cuatro veces más

grande que la anterior!

Es decir, duplicar los lados no implica *duplicar* la superficie: el área se *¡cuadruplica!*

Más allá de hacer las cuentas (que figuran en el 'Apéndice'), la pizza grande debería costar *cuatro veces más* que la pizza chica, es decir, 400 pesos. Lo mismo con los ingredientes. Si usted usa —por ejemplo— 100 gramos de muzzarella y tres fetas de jamón en la pizza chica, en la grande tiene que poner 400 gramos de queso y 12 fetas de jamón.

Es sorprendente, pero es lo que sucede. Uno puede usar cantidades menores, pero eso atentará inexorablemente contra la calidad del producto[47].

Con esta misma idea, le propongo que piense lo que sucede con las albóndigas. ¿Cómo aumenta el volumen si uno *triplica* el diámetro?

Ahora, en lugar de una habitación de (1×1), exploremos lo que pasa con un cubo para resolver el problema de las 'esferitas'. Suponga que tiene, por ejemplo, un *cubito de hielo* que mide $(1 \times 1 \times 1)$ cm, o sea, un centímetro de largo, de ancho y de alto. El volumen, que se calcula multiplicando esos tres números, resulta ser *un centímetro cúbico*.

Ahora, tripliquemos cada lado. El nuevo cubo es de $(3 \times 3 \times 3)$ cm, ya que cada lado tiene tres centímetros. Haga la cuenta conmigo. El resultado es ¡27 centímetros cúbicos! ¿Y qué dice esto? Contra lo que la intuición parece indicar, si uno triplica el lado, el volumen hay que multiplicarlo por 27.

Me imagino que usted debe estar pensando: "Un momento. Usted me planteó ejemplos de pizzas (círculos) y albóndigas (esferas)… ¿por qué ahora hace el análisis con 'cuadraditos' y 'cubitos'?".

Y tiene razón. Pero créame que las *ideas* importantes están en los dos casos que escribí recién. De todas formas, en el Apéndice aparecen algunas ideas complementarias.

Ahora volvamos al ejemplo de las albóndigas. Como el diámetro de la albóndiga más grande *triplica* el diámetro de la más chica, eso significa que en la grande hace falta usar 27 veces la cantidad de carne que se usa en la chica. Como el cartel ofrece *dos* albóndigas grandes, la cantidad de carne involucrada es *dos veces 27*, o sea, el equivalente a 54 albóndigas chicas. ¿Qué le conviene hacer, entonces? ¡Llevarse las dos grandes! Ni aunque le dieran 50 de las más pequeñas le convendría aceptar.

Eso contesta las preguntas, pero lo más importante acá es advertir que una modificación *lineal* (como fue el aumento del diámetro de la

pizza o de la albóndiga) implica una modificación *cuadrática* en el caso de la superficie y *cúbica* en el caso del volumen. ¿No sería útil saber esto para poder operar en la vida cotidiana?

Apéndice

El área de un círculo de radio R se obtiene multiplicando el número π por el *cuadrado* del radio. Es decir, se usa la fórmula[48] (creo que famosa) que uno repite *casi de memoria*: la superficie de un círculo es "pi por radio al cuadrado".

$$(\pi \times R^2)\ (*)$$

Si ahora uno *duplica* el radio, en el lugar en donde aparece la letra R necesitará poner (2 × R), ya que el radio del nuevo círculo (la pizza grande) es (2 × R). Luego, para calcular el área del nuevo círculo, hay que hacer:

$$(\pi \times (2 \times R)^2) = \pi \times 2^2 \times R^2 = 4\ (\pi \times R^2)(**)$$

Si usted compara (*) y (**), advierte que la superficie del nuevo círculo es *cuatro veces más grande* que el área del círculo pequeño, y esto sucedió porque $4 = 2^2$. De la misma forma, si multiplica el radio por 10, entonces el área aparecerá multiplicada por ¡diez al cuadrado!, o sea, 100 veces más.

Para calcular el volumen de una esfera de radio R, usa la fórmula:

$$(4/3) \times \pi \times R^3(***)$$

Fíjese que si usted *duplicara* el radio, debería poner (2R) en la fórmula (***). ¿Qué relación habrá entre los dos volúmenes? Aparecerá el factor $(2^3) = 8$, lo que indica que el volumen se *octuplica*. Y si lo *triplicara*, como hicimos con las albóndigas, entonces en la fórmula aparecerá $(3^3) = 27$.

47. Estoy asumiendo que la proporción de ingredientes aumenta de forma lineal, y no sé si esto es cierto desde el punto de vista 'culinario'. Es decir, es difícil para mí

saber si la pizza con el doble de diámetro lleva 4 veces la cantidad de sal, ni que el *costo* de producción se multiplique por 4 también, y ni hablar del 'tiempo' que lleva en el horno. Sobre estos temas, estoy seguro de que usted debe saber mucho más que yo.

48. Todas las fórmulas que aparecen en este texto están en todos los libros clásicos de geometría. Por ese motivo no incluí ninguna deducción aquí.

Contraseña

Lunes por la mañana, temprano. Suena el teléfono. Me despierto mal y, mientras trato de atender, busco con la vista el reloj grande en la pared. Un poco más de las cuatro y media. Miro otra vez… sí, empezaba con *cuatro*. No reconozco el número pero atiendo igual.

—¿Sí? —balbuceo con voz que ni yo mismo reconozco.

—Adrián, soy Raúl. Estoy en Mendoza, en un hotel. Vine por laburo —escuché del otro lado. La voz *sí* era la de Raúl.

—¿Estás bien? —le pregunto preocupado—. ¿Qué hacés en Mendoza? ¿Qué raro que me llames a esta hora? ¿Te pasa algo?

—No, no, estoy muy bien. Te cuento por qué te llamo. Necesito que me ayudes y no conozco otros matemáticos.

—¿Matemáticos? ¿Qué te pasó? Contame.

—Mirá. Viajé ayer a última hora de la tarde desde Aeroparque. Ni bien aterrizamos, salí apurado del avión porque tenía una reunión y no quería llegar tarde. Cuando subo al taxi que me llevaría el centro, ¡me quise morir! Recién ahí me di cuenta de que me había dejado la computadora debajo de mi asiento. La laptop… me la olvidé dentro del avión. ¡No lo podía creer! Volví a la terminal, pero era demasiado tarde. El avión había seguido para Santiago de Chile. Llegué al hotel y con el celular pude seguirle los pasos (al avión). Apenas supe que había aterrizado, llamé al mostrador de la compañía en el aeropuerto. Expliqué mi situación, les di mi número y me quedé esperando. A la media hora se comunicaron conmigo… ¡no encontraron nada, Adrián! ¡Me quiero matar! —siguió en un monólogo sin pausa—. No me importa el valor de la computadora. Mi problema son los datos, ¿me entendés? Son confidenciales, hay un montón de contraseñas, direcciones, números de teléfonos… ¡Me van a matar! ¡No lo puedo creer! ¡Soy un imbécil!

—Raúl —seguí yo sin entender todavía por qué estaba tan angustiado—, quedate tranquilo. Te van a entender. No te preocupes. De todas formas, ¿no tenías una clave para entrar?

—Sí, justamente por eso te llamo. Yo sé la clave, pero tengo miedo de que sea muy fácil de descubrir. Te explico. Como yo tengo tantas contraseñas en tantos lugares, ni bien la encendés aparece una

pequeña ayuda para que me indique cuál de las claves que uso es la que me sirve para *esa computadora en particular*. Se ve claramente que hay que llenar *ocho caracteres* y yo me anoté como ayuda memoria: 6 MIN, MAY, NÚM.

—Raúl, nadie va a entender eso. ¿Qué quiere decir MIN, MAY, NÚM? Bueno —me interrumpí porque me di cuenta de algo y no quería engañarlo—: me imagino que MIN es por minúscula, MAY es por mayúscula y NÚM por número… pero ¡no te preocupes! Solamente con esos datos, va a ser muy difícil de descubrir.

—¿Ves? ¿Ves? ¡Vos te das cuenta inmediatamente de que yo usé seis letras minúsculas, una mayúscula y un dígito! Y es *exactamente así* —seguía casi desesperado—. Decime, por favor: si alguien detecta lo mismo que vos, ¿tiene que probar con muchas combinaciones hasta descubrir la verdadera clave? ¿Con cuántas claves tiene que probar?

Aquí lo dejé. Y aprovecho para plantearle el problema a usted. Yo le dije que se quedara tranquilo, que son muchas. ¿Hice bien? Usted… ¿qué piensa?

Respuesta

Y sí… son muchas. ¿Quiere acompañarme a recorrer *un* posible camino para determinar cuántas hay? La respuesta que encontremos será única, pero las formas de llegar son múltiples.

En principio, hay 27 letras en nuestro alfabeto. De ellas va a salir la mayúscula y también saldrán las minúsculas. El dígito tendrá que ser un número cualquiera entre: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Como hay ocho casillas para llenar, la letra mayúscula puede ir en cualquiera de esos *ocho* lugares. Una vez que elegí el lugar que ocupa la mayúscula, quedan *siete* casillas libres para el dígito. O sea, en total hay:

$$8 \times 7 = \mathbf{56}$$

formas de ubicar la mayúscula y el dígito.

Ahora, quiero contar cuántos pares se pueden formar con una letra y un dígito. Tengo 27 posibilidades para elegir la letra y 10 para elegir el dígito. ¿Conclusión? En total hay:

$$27 \times 10 = \mathbf{270}$$

pares de letra y dígito.

Fíjese que para *cada una de las 56 posibilidades* de elegir las dos

casillas donde van a ir la mayúscula y el dígito, tengo 270 posibles formas de llenar esas casillas. En total entonces,

$$270 \times 56 = \mathbf{15.120}$$

Llegamos a la conclusión de que hay 15.120 formas distintas de distribuir una mayúscula y un dígito usando dos de las ocho casillas posibles. ¿Y ahora? Lo que sigue es más sencillo. ¿Por qué? ¿No quiere seguir pensando usted?

Cuando uno determinó en qué casillas va a ubicar la mayúscula y el número, ya sabe lo que va en cada una de las seis restantes: una letra minúscula. Y en cada una de esas seis casillas, puedo poner cualquiera de las 27 letras del alfabeto. Es decir, en esas seis casillas van

$$27 \times 27 \times 27 \times 27 \times 27 \times 27 = 27^6 = \mathbf{387.420.489}$$

Último paso. Lo único que queda ahora es usar toda la información que juntamos. Sabemos que hay 15.120 formas de distribuir la mayúscula y el dígito y, *para cada una* de esas formas, hay 387.420.489 maneras de elegir seis minúsculas.

Moraleja:

$$(15.120) \times (387.420.489) = \mathbf{5.857.797.793.680}$$

Si quien se llevó la laptop quisiera probar intentando con una combinación por *segundo* (y le sugiero que haga la cuenta) verá que necesitará algo así como 67.798.586 días o, lo que es lo mismo, 185.750 años o, si prefiere, un poco más de 1.857 siglos.

Lo llamé a Raúl inmediatamente: “Raúl, la contraseña es muy segura. Si alguien intenta violarla, se va a morir antes. Andate a dormir y quedate tranquilo”.

Corté y volví a la cama. Tendría tiempo de dormir una hora más, por lo menos. Con todo, había *algo* que me hacía ‘ruido’. Es que el cálculo de que una persona tardaría casi dos mil siglos en probar todas las combinaciones si intentara una por segundo se basa en eso… ¡*en una persona*! ¿Habrá otras formas más rápidas?

Me levanté y le escribí a Carlos D’Andrea, que es profesor en la Universidad de Barcelona. A través de él, yo sabía que llegaría hasta Don Coleman, un especialista en analizar cuestiones de seguridad cibernética. No habían pasado ni diez minutos cuando recibí este correo de parte de Carlos:

Adrián, me dice Don que hay programas que buscan passwords y van pasando por todas las combinaciones posibles a una velocidad increíble (esto obviamente no lo puede hacer un humano sino otra máquina conectada con la que va a ser hackeada). Ocho caracteres es un poco el límite de lo que pueden hacer, pero darles la información 6 min + 1 may + 1 núm les hace el trabajo bastante más fácil. Así que, si yo fuera tu amigo, no me iría a dormir tan tranquilo…

Me quedé mortificado y dudando si llamarlo a Raúl. Preferí no hacerlo. ¿Qué le iba a decir? Por lo menos él pasó una buena noche.

El reino de Josefina

El que sigue es un problema de lógica precioso. Para abordarlo, le pediría que lea el enunciado pero *no* la solución. Créame: la *única gracia* posible es que lo piense usted, verá que encima se va a divertir. Lo voy a presentar como si fuera un cuento. Acá voy.

Suponga que hay un país que desde su fundación ha sido siempre gobernado por mujeres, algo así como un verdadero 'matriarcado'. En el momento en que se produjeron los hechos que quiero contar acá, la reina era conocida con el nombre de Josefina.

Josefina siempre había tenido problemas en aceptar la infidelidad de los hombres que habían jurado *lealtad a sus respectivas mujeres el día de su casamiento*. Con el objetivo de resolver este tipo de situaciones, había promulgado algunas leyes ciertamente curiosas.

La primera decía que para que una mujer pudiera casarse *tenía que aprobar un test de lógica*, de manera tal que pudiera manejarse en la vida con una capacidad lógica 'impecable'.

Por otro lado, en el reino de Josefina, *toda mujer sabía sobre la fidelidad de todo hombre casado pero* con ***una sola excepción: ¡su propio marido!*** Es decir, cada mujer sabía cuán fiel era todo hombre casado que viviera en cualquier otra casa, salvo en la propia.

Pero había más: por una cuestión de 'elegancia y etiqueta', ninguna persona podía acercarse a una mujer y hablarle sobre la fidelidad de su marido. Con eso se completaba el círculo: una mujer no podía ni saber ni averiguar nada a través de otras personas sobre lo que sucedía en su propia casa respecto a la fidelidad de su esposo.

Las casas de este reino estaban congregadas en un lugar muy reducido, de tal manera que —por ejemplo— cualquier disparo producido con un arma de fuego era escuchado por *todos los habitantes*. Es decir, cualquier *explosión* que se produjera en una casa del reino era escuchada claramente en *toda* otra casa.

Esto habría de adquirir mucha importancia porque Josefina había determinado, con otra ley, que si una mujer descubría (por algún medio) que su marido le era infiel, debía matarlo a la medianoche del día en el que se enterara, pegándole un tiro de escopeta en la cabeza.

Aun con todas estas restricciones, la vida transcurría normalmente.

Pero un día, sorpresivamente, Josefina congregó a todos los habitantes del reino a una reunión en la plaza central. Allí presentó a su gran amiga Cleopatra, la reina de un pueblo vecino. Si bien en el reino de Josefina se sabía desde hacía mucho tiempo acerca de la amistad entre las dos mujeres, nunca se había producido una presentación de estas características. Cleopatra se paró en un banquito y pronunció un discurso que tuvieron que escuchar —forzosamente— *todos los habitantes*. En tono admonitorio le comunicó a toda la población allí reunida que ella se había enterado hacía nada más que una hora que en el reino había ***por lo menos un hombre casado*** que le era infiel a su mujer.

¿Qué cree usted que pasó a partir de allí?

Solución

Para pensar lo que sucedió en el reino de Josefina le voy a proponer que vayamos imaginando juntos potenciales situaciones. En el momento en que Cleopatra pronuncia su discurso, todas las mujeres del reino sabían lo que sucedía con todos los hombres *salvo* con sus propios maridos. Le propongo que empecemos, usted y yo, suponiendo que en el reino hay (y esto es importante) *un solo* marido infiel.

De acuerdo con todo lo que escribí antes, *todas las mujeres sabían que había un marido que era infiel, pero había una excepción: su propia mujer*.

Lo interesante es que ella era la única del condado que creía que *¡todos los maridos eran fieles!* Por lo tanto, cuando ella escucha a Josefina en la plaza, no tiene más dudas: el infiel *tenía que ser su propio marido*. Llega la noche y lo mata (tal como estaba estipulado por la ley).

En definitiva, si en el reino hay un solo marido infiel, su mujer se entera en el momento en que escucha el discurso de Cleopatra, y lo mata esa misma noche.

Ahora, pasemos el caso siguiente: en lugar de *un solo marido infiel, hay* ***dos***.

La situación es distinta, porque al haber dos, las mujeres de estas dos personas creían que había solamente *uno*. El resto de las mujeres saben perfectamente que hay dos. Recuerde lo que escribí antes: si hay *uno solo*, esa misma medianoche su propia mujer lo va a matar. Cuando llega la medianoche y no se escucha ningún disparo, eso les indica a estas dos mujeres que tiene que haber más de un infiel. Por lo tanto, *las dos mujeres que creían que había solo uno saben que hay dos y, por lo tanto, a la segunda medianoche ¡matan a sus propios maridos!*

La moraleja es que si hay dos maridos infieles, las mujeres de ambos no los matan la misma noche, sino a la segunda, y eso resuelve este caso.

¿Quiere pensar qué sucedería si, en lugar de uno o dos maridos infieles, los que engañaran a sus mujeres fueran tres?

Sigo yo. Supongamos que son tres los infieles. Como en el caso anterior, todas las mujeres del reino saben que son tres, salvo las tres esposas engañadas, que creen que son dos. Estas tres saben que, si hay dos (como vimos en el caso anterior), a la segunda noche deberían escucharse dos disparos. Cuando esos disparos no se escuchan, ellas saben que tiene que haber un tercero, y que los infieles son los maridos de cada una de ellas. ¿Qué tienen que hacer, entonces? La tercera noche se escuchan tres disparos: cada una de estas tres mujeres mata a su marido.

A esta altura creo que está claro cuál es el patrón. Si en el reino de Josefina hubiera veinte maridos infieles, habrá que esperar que pasen diecinueve noches para escuchar los disparos. Pero *seguro* que, en la vigésima noche, habrá veinte tiros que implicarán la muerte de veinte hombres infieles. Y lo mismo si, en lugar de veinte, la cantidad de maridos infieles fuera cualquier número *n*. En la 'enésima' noche habrá *n* disparos.

Y esta es la conclusión final. Como siempre, haciendo gala de una lógica impecable, no hay lugar para infidelidades en el matriarcado de Josefina. No quiero imaginarme lo que pasaría en nuestras sociedades con leyes de ese tipo… pero esas conclusiones se las dejo a usted.

¿Qué esconde el número de su tarjeta de crédito?

Supongamos que usted y yo estamos comunicados por vía telefónica o a través de un intercambio de e-mails. Usted me quiere mandar un número que tenga 10 dígitos y queremos estar seguros de que los números que yo recibí son los que usted me quiso enviar. Es decir, necesitamos estar seguros de que usted y yo tenemos los mismos datos.

Lo que voy a hacer es mostrarle un método para *verificar* que esos dígitos que usted me mandó (y que yo recibí) son los correctos. Para eso, le voy a pedir que agregue un número más y que, en lugar de mandarme 10, me mande 11: ese último dígito tiene que servir como 'autoverificación' de que los primeros 10 son los correctos.

¿Cómo se logra? Una forma de conseguirlo es mediante un algoritmo que inventó Hans Peter Luhn en el año 1954 y que fue patentado ¡seis años después!, en 1960.

Funciona así. Supongamos que los números que usted me quiere mandar son:

en donde 'x' es el número que *falta determinar*, y que va a servir para *verificar* que los primeros diez dígitos que me mandó son los correctos.

Si usted se fija, los que están en las posiciones 'impares' son 7, 9, 7, 9, 7 y 'x', mientras que los que están en las posiciones 'pares' son: 1, 8, 3, 2 y 9.

Ahora, le pido que usted *duplique* los dígitos que están en las posiciones 'pares'. Se obtiene lo siguiente:

Algunos números de la segunda fila tienen dos dígitos (como 16 y

18). Sume esos dígitos. Es decir, donde dice 16 usted deberá poner 7 (ya que 1 + 6 = 7), y donde dice 18 usted deberá poner 9 (ya que 1 + 8 = 9). Formamos, entonces, una nueva fila con estos números:

(■)

Finalmente, sume todos los dígitos que figuran en esta fila:

(7 + 2 + 9 + 7 + 7 + 6 + 9 + 4 + 7 + 9 + x) = 67 + x

Ahora quiero mostrarle qué valor *tiene que tener la 'x'*, de manera tal que los primeros diez dígitos sean los que usted me quería mandar (y que yo quería recibir). ¿Qué valor debe tener 'x', entonces?

Es una idea muy sencilla: la suma de todos los números que figuran en (*) tiene que ser un múltiplo de 10. O sea, un número que 'termine' en cero. Si uno suma *todos* los anteriores, obtiene 67. En consecuencia, el dígito que 'falta', el que llamé 'x', tiene que ser un ***tres***. El único ***dígito*** que uno puede agregar para que la suma resulte ser un múltiplo de diez y hacerla 'llegar a 70" es el *tres*. Y listo.

Si por cualquier razón el número 'x' ***no fuera*** un '3', entonces algún otro de los dígitos que usted me mandó está equivocado.

Una vez llegado a este punto, creo que se entiende cuál fue la idea de Luhn: agregar al final un dígito que sirva como 'auto-corrector', de manera tal que uno pueda 'verificar' que no se cometió un error de buena fe. En algunos ejemplos se *duplican* los números que están en las posiciones *pares* —como hice antes— y, en otros casos, los que figuran en las posiciones *impares*. Por supuesto, lo único que hace falta es que el protocolo lo especifique dependiendo del contexto en el que se va a utilizar.

Quiero mostrar cómo se usa el algoritmo de Luhn en el caso más frecuente: la transmisión de los dígitos de una tarjeta de crédito. Si bien la cantidad de dígitos que aparece en una tarjeta no es un número fijo, el caso más usual es el de 16 dígitos. Para avanzar con mi ejemplo, voy a fabricarme un número de 16 dígitos que podría figurar en una tarjeta de crédito (o débito) de la vida cotidiana. Veremos juntos si el número que me inventé *es* o *no* un caso posible. Le sugiero que usted haga lo mismo, generándose una tira de 16 dígitos, y vayamos haciendo en paralelo las cuentas y las verificaciones que correspondan.

Yo propongo:

Ahora voy a generar una nueva fila, en la cual voy a DUPLICAR los dígitos que figuran en las posiciones *impares,* o sea, 5, 5, 4, 8, 3, 2, 0 y 6.

A continuación pongo las dos tiras: arriba, la original, y abajo, la que tiene duplicados los dígitos que figuran en las posiciones *impares*:

Destaqué los números que fui duplicando, que son los que figuran en las posiciones *pares*.

Como usted advierte, en la segunda fila hay algunos números que contienen *dos dígitos*; aparece dos veces el número 10, una vez el 16 y una vez el 12. En cada caso, sumo los números que están entre paréntesis. Ahora tengo una tercera fila:

Debajo de cada número (10), puse un *uno* porque (1 + 0) = 1; debajo de donde dice 16 puse 7 porque (1 + 6) = 7; por último, debajo de (12) puse 3 porque (1 + 2) = 3.

Y llegamos al último paso: hay que sumar *todos* los dígitos que figuran en esta última fila:

(1 + 7 + 1 + 2 + 8 + 3 + 7 + 8 + 6 + 4 + 4 + 8 + 0 + 4 + 3 + 4)

Si todo estuviera bien, la suma tendría que dar un número *múltiplo de diez*, o sea, tendría que terminar en *cero*. Haga usted la cuenta conmigo, entonces:

(1 + 7 + 1 + 2 + 8 + 3 + 7 + 8 + 6 + 4 + 4 + 8 + 0 + 4 + 3 + 4) = 70

Como la suma efectivamente ofrece un número múltiplo de 10, entonces los primeros 15 números *pueden pertenecer a los dígitos de una tarjeta de crédito*. Como ya expliqué, ¡esto no garantiza que la tarjeta sea válida ni que la cuenta de quien la presenta tenga fondos, ni dice nada sobre la historia crediticia del dueño! Solo dice que *lo más probable es que no se haya producido ningún tipo de error en la transmisión de los datos*. Y esto es todo lo que uno quería conseguir.

Lo que me interesa enfatizar acá es que el último dígito, el número *cuatro* del final, es el que confirma que los primeros 15 están bien. No se pretende ninguna otra cosa, y eso, con el uso de este algoritmo, está garantizado. Es decir, cuando uno quiera pagar una compra con tarjeta de crédito o de débito y no está en condiciones de alcanzarle 'físicamente' el 'plástico' al vendedor, el uso del algoritmo de Luhn garantiza que no habrá errores de buena fe[49].

49. El algoritmo sirve —por ejemplo— para detectar si uno se equivoca al ingresar un solo dígito o para evitar el más común de todos los errores de tipeo: las transposiciones de números consecutivos. Pero es muy importante que sean consecutivos: si uno transpusiera los dígitos que ocupan dos lugares *pares* o *impares*, el algoritmo no los 'vería' porque el resultado le daría igual.

El problema del no vidente

Quiero plantear un problema *precioso* y me apuro a escribir que no es mío ni se me ocurrió a mí. El atractivo central es que requiere la elaboración de una *estrategia*. Por lo tanto, *hay que pensar*.

Cuando uno lee el enunciado por primera vez, sospecha que el problema no tiene solución. Uno *cree* que no se va a poder. Y, sin embargo, sí se puede.

No se me escapa que se conocen múltiples variantes del problema. Yo elegí una de ellas, la que me interesó a mí, pero créame que buceando en internet hay muchas versiones distintas, aunque conceptualmente similares.

Una última cosa: si usted tiene la tentación de leer la solución (y no hay ninguna razón para sospechar que yo no haría lo mismo), le sugiero que lo piense antes. Créame que se va a privar de disfrutar el problema *aun* en el caso de que no se le ocurra nada. Si me permite una sugerencia, no se prive del placer de pensarlo. Vale la pena. Ahora sí, acá voy.

Supongamos que uno tiene 150 personas en una fila, *ordenadas por altura de forma creciente, de adelante hacia atrás*. La persona más baja de los 150 será la que ocupe el primer lugar de la fila, y la más alta será la última. Lo curioso es que no hay dos alturas repetidas, de manera tal que el orden es *estrictamente creciente*.

Dicho esto, un señor *no vidente* (a quien voy a llamar 'A'), que tiene una altura *distinta* de la de todos los que están en la hilera, quiere incorporarse a ella respetando las reglas que siguen todos. Es decir, una vez que se ubique, *tendrá adelante a una persona más baja que él, y atrás, a una persona más alta*.

Ahora bien: como 'A' no puede ver, para poder encontrar su lugar tendrá que hacer algunas preguntas a quienes ya están ubicados… pero no cualquier tipo de pregunta, solamente esta: "¿Es usted más alto que yo?". Nada más.

Estas son las reglas:

a. Todos están forzados a decir la verdad.

b. ‘A’ puede formular la pregunta tantas veces como quiera y, naturalmente, las dos potenciales respuestas son ‘sí’ y ‘no’ (eso sucede porque *todos* tienen una altura diferente entre ellos y respecto de ‘A’).
c. Nadie puede contestar ‘no sé’. Todos son capaces de comparar su altura con la de cualquier otra persona.

Pero falta algo más. Naturalmente, ‘A’ podría empezar preguntándole al primero que está en la fila. Si le contesta que sí (recuerde lo único que él puede preguntar: “¿Es usted más alto que yo?”), entonces él se ubicará allí adelante y se terminó todo. También podría suceder que la primera respuesta sea un ‘no’, y entonces necesitará seguir preguntando. Creo que está claro que si ‘A’ le pregunta a cada uno siguiendo el orden en el que aparecen en la fila, encontrará su lugar en el primer momento en que alguien le diga ‘sí’. Cuando eso suceda, se ubicará entre quien le contestó afirmativamente y el anterior.

Ya sé, ya sé (lo que usted está pensando): ¿y si nadie le dice que sí? Bueno, en ese caso, ‘A’ terminará siendo el más alto de todos y se ubicará en el último lugar.

Así planteado, el problema no tiene ninguna gracia. Quiero proponerle *otra restricción* que le dará un *sabor distinto al problema* y le proporcionará otro tipo de satisfacción al pensarlo.

Suponga que quien escribió las reglas le dice a ‘A’ que debe encontrar su lugar en la fila al escuchar *a lo sumo* dos respuestas afirmativas. Es decir: puede escuchar que le contesten que ‘no’ incluso 150 veces (si él es el más alto de todos), pero la idea es que ‘A’ pueda elaborar una estrategia que le permita encontrar dónde ubicarse al escuchar (como máximo) dos veces ‘sí’.

Fíjese que *no estoy diciendo que forzosamente tiene que escuchar dos veces ‘sí’*. De hecho, si al preguntarle al primero de la fila este le dijera que sí, lo escuchará *una sola vez* y no le hará falta nada más: se ubica adelante de todos y listo. Lo que le estoy diciendo es que, en el momento que ‘A’ escuche el *segundo* ‘sí’, no podrá preguntar más. Allí tendrá que haber conseguido la información suficiente para *poder decidir cuál es el lugar que ocupará en la hilera.* El segundo ‘sí’ indicará el final de las preguntas.

Ahora —finalmente—, el enunciado del problema:

¿Qué estrategia podría diseñar usted si fuera quien asesorara a ‘A’, de manera tal que le sirva para encontrar su lugar en la hilera ***haciendo el mínimo número de preguntas posible****?*

Por supuesto, tendrá que respetar las reglas sin importar cuál sea la distribución de las 150 personas.

Una pausa. Le sugiero que lea el problema con detenimiento, porque parece una suerte de trabalenguas cuando, en realidad, debería ser fácil de entender. Antes de avanzar, convénzase de que entendió qué es lo que hay que hacer, qué *estrategia* se espera que usted diseñe, qué es lo que le está permitido hacer y qué está prohibido (por ejemplo, formular alguna pregunta que difiera de la que escribí antes, u obtener más de dos respuestas afirmativas).

Para continuar, quiero ofrecerle yo *una parte* de la solución. Le voy a dar el *menor número de preguntas que usted va a necesitar que 'A' formule* para estar seguro de que, sin importar cuál sea la relación de su altura con las otras 150 personas, 'A' encontrará su lugar. Ese número es 17. Sí, diecisiete.

Algunas preguntas que creo que la/lo van a ayudar:

- ¿A quiénes les tiene que preguntar?
- ¿En qué orden?
- ¿Cómo idear un plan que *asegure* que, haciendo *a lo sumo* 17 preguntas, 'A' encontrará su lugar?

Otras preguntas posibles:

- ¿Su estrategia será *única* o puede haber otras?
- En todo caso, ¿no habrá otra forma de diseñar una estrategia de manera que —eventualmente— con *menos* preguntas 'A' pueda encontrar su lugar?

Como ve, hay muchos interrogantes. Si me permite, una última observación antes de dejarla/lo pensar: no se frustre si no se le ocurre *algo* de entrada. Intente probando y 'errando'. No conozco otra forma. Dudo de que a alguien se le pueda ocurrir qué hacer sin intentar y equivocarse o fallar.

Ahora sí, le toca a usted.

Respuesta

Una vez más, no me imagino que una persona que vea este problema por primera vez pueda intuir qué hacer sin someterse a un

juego de ‘prueba’ y ‘error’; no hablo de lo que me pasó a mí exclusivamente, sino de lo *vi* que les sucedía a todos aquellos a quienes se lo conté a lo largo de los años.

Le sugiero que empecemos pensando con números más pequeños para tratar de encontrar alguna idea. A priori, sin reducirlo a una situación más manejable, debería confesar que no se me ocurre nada. Más aún: podría pasar que el señor ciego fuera el más alto o el más bajo. ¿Cómo conciliar esto?

A partir de ahora voy a suponer que yo soy el señor ‘A’. Es decir, en este trayecto, yo soy la persona no vidente y me propongo *encontrar* mi lugar en la fila consultando *a lo sumo* a 17 personas. Veamos cómo hacer.

Un par de hechos importantes que quiero compartir. Le pido que, antes de avanzar, nos aseguremos de que usted comparte conmigo lo que voy a escribir.

Suponga que le pregunto a la persona 40, por elegir un número cualquiera.

a. Si me contesta que no, quedan eliminadas las primeras 40 personas. Mi lugar en la fila estará detrás del número 40. Podría ser incluso que no hubiera nadie más alto que yo, en cuyo caso mi lugar sería detrás del 150 (si él fuera el último): yo sería a partir de ese momento el más alto de todos. Eso sí: si el número 40 me contesta que no, gasté una pregunta *pero no utilicé ninguno de los dos ‘sí’* que puedo usar para encontrar mi lugar.
b. Si me contesta que sí, entonces mi lugar en la fila está por delante del 40. En este caso, *usé* una de las 17 preguntas y me *gasté* uno de los dos ‘sí’ que puedo escuchar. A partir de este punto, *no me queda más alternativa que empezar a preguntar desde el primero de la fila, uno por uno*. ¿Por qué? Desde este momento, ante cualquier pregunta que haga con una respuesta afirmativa, yo debería tener *toda la información* necesaria para saber dónde debo ubicarme. Fíjese lo que sucedería si, después de haber recibido un ‘sí’ del número 40, decidiera preguntarle ahora al número 20 (por poner un ejemplo cualquiera): ante una respuesta afirmativa, yo no sabría dónde ubicarme, ya que lo *único* nuevo que aprendí es que mi lugar está entre los 19 primeros. Y no tengo más preguntas para poder determinarlo. Luego, si el número 40 me contesta que sí, me veo forzado a ir hasta la primera persona de la fila y seguir preguntando desde allí. Aquí me interesa sugerirle que pensemos que, si bien estoy forzado a preguntarle a la primera persona, me quedan *nada*

más que 16 preguntas (ya usé una para el número 40). ¿Qué indica esto? ¿Será *razonable empezar* con el número 40? ¿No convendría, entonces, *empezar* con aquella persona cuyo 'sí' me permitiera saber en qué lugar ubicarme sin exceder las 16 preguntas que me quedan? Si usted piensa un instante, descubrirá que me *conviene* empezar con la persona número 17.

Le pido que relea los puntos (a) y (b) para estar preparado para lo que sigue. Yo tomé el número 40 porque tenía que elegir alguno. Lo podría haber llamado X, pero preferí el 40 para tener un número concreto.

Ahora sí, empiezo con la estrategia. Le recuerdo que yo tengo 17 preguntas por hacer y hay 150 personas en la fila.

Empiezo así. Le pregunto primero a la persona número 17.

1. Si me dice que sí —como hice en (b)—, tendré que seguir preguntando a partir del primero de la lista. ¿Por qué? Es que, en el peor escenario, en el que *todos* los anteriores (del 1 al 16) me dijeran que no, habré usado *todas las preguntas posibles* (las 17) y, además, si todos me contestaron negativamente, entonces mi lugar en la fila es entre el 16 y el 17. Podría ser que algún otro me dijera que sí antes; en ese caso, me tendría que poner delante de él y detrás del anterior que me había dicho que no. Por ejemplo, empiezo preguntándole al 1, que me dice que no. Al 2, que me dice que no. Al 3, al 4, al 5… todos me dicen que no. Supongamos que el número 6 me dice que sí. Esto quiere decir que el 6 es más alto que yo. Como el 5 me había dicho que no, mi lugar entonces es entre el 5 y el 6. Fíjese que lo encontré usando 17 preguntas o menos (en este último caso habrían sido siete preguntas: al 17, al 1, 2, 3, 4, 5 y 6). Cuando escuché el segundo 'sí', supe cuál era mi lugar.
2. Si el número 17 me dice que no, entonces lo único que pasó es que me gasté *una pregunta* de las 17 posibles, pero todavía sigo conservando los dos 'sí'.

¿A quién preguntarle ahora? ¿Quiere pensar usted? Fíjese que usé nada más que una pregunta y tengo todavía a mi disposición los dos 'sí'. Supongamos que (por probar con un número cualquiera) elijo el número 70. Si me dijera que no, me vendría bárbaro, porque si bien usé en total dos preguntas, con ellas eliminaría 70 personas. Si llegara a haber alguien más alto que yo, tendría que estar después del 70.

Pero ¿si el 70 me llegara a decir que sí? Entonces estaría con un problema serio: por un lado, ya usé dos preguntas de las 17 y, por otro, como escribí en (b), la próxima pregunta se la *tengo* que hacer al número 18, ya que la primera persona más alta que yo debe ser alguien que esté ubicado entre el 17 y el 70. Ahora bien: tengo nada más que 15 preguntas para hacer. Claramente, si todos me dijeran que no, yo llegaría hasta el número 32 (desde el 18 hasta el 32 hay 15 preguntas, aunque parezcan 14… verifíquelo usted). Por lo tanto, si hasta el 32 me dijeron todos que no, me gasté todas las preguntas que tenía y sigo sin saber mi lugar.Luego, haber 'saltado' del 17 al 70 no fue una buena decisión. Por eso, sabiendo que, cuando haga la siguiente pregunta, si me contestaran que sí me quedarían nada más que 15 preguntas, debería hacérsela a alguien que me permitiera cubrir *todo el espectro entre 18* (que es desde donde debo empezar a preguntar) y el siguiente que resulte de sumar (18 + 15) = 33.

Este dato es muy importante: como yo voy a tener que empezar en el número 18, con 15 preguntas puedo llegar hasta el 32. ¿Moraleja? La siguiente pregunta (si el 17 me dice que no) debo hacérsela al 33. Si el 33 me dice que no, ya veré cómo sigo. Pero si me dice que sí, empiezo preguntándole al 18 y me quedan justo 15 preguntas para cubrir todas las posibilidades hasta el 32, por lo que es *seguro* que voy a descubrir mi lugar en la fila.

Como usted advierte, si el 33 me dijera que no, el siguiente debería ser… (¿quiere pensar usted?) sí, el 48. ¿Por qué? Porque ya tenemos una idea de cómo seguir: llegando hasta el 62 (48 + 14), ya que 14 es el número de preguntas que me van a quedar). Si me contesta que sí, entonces uso las 14 preguntas empezando desde el 34 y con ellas llego hasta el 47, que es lo que necesito.

Creo que a esta altura usted ya ha descubierto cuál es el patrón que voy a usar independientemente de que la respuesta sea afirmativa o negativa.

La figura 1 resume lo que vimos hasta acá: empecé preguntando al 17, después al 33 (que son 16 más), después al 48 (que son 15 más), después al 62 (que son 14 más) y sigo con estos: 75, 87, 98, 108, 117, 125, 132, 138, 143, 147, 150, 152 y 153.

¿Qué conclusiones podemos sacar?

La primera es que, si me llegaran a contestar todos que no, con las 17 preguntas que tenía inicialmente llego a cubrir hasta el 150, e incluso más. De hecho, hasta el 153.

Si en alguno de los pasos intermedios uno de ellos me contestara que sí, el número de preguntas que me queda a esa altura es *exactamente* el que necesito para ir para atrás y empezar preguntando

uno por uno.

Es decir: es una buena estrategia, porque agoto todos los casos que se me pudieran presentar. Está claro que puede que *no necesite usar las 17 preguntas e incluso que no necesite llegar a escuchar los dos 'sí'*. De hecho, si yo fuera el más alto de todos, *no escucharía ningún 'sí'*.

Ahora bien. No quiero terminar sin mostrar que con *menos* de 17 preguntas puede que no llegue a determinar mi lugar en la fila[50].

Supongamos que tuviera 16 preguntas por hacer.

Empiezo en el número 16 y voy haciendo, como antes, sumas que vayan disminuyendo en uno. Las personas a las que les preguntaría son:

16, 31, 45, 58, 70, 81, 91, 100, 108, 115, 121, 126, 130, 133, 135, 136

Es decir, con *menos* de 17 preguntas, no llego a cubrir las 150 personas de la hilera. Y esto termina el análisis. Hemos encontrado una estrategia que funciona: con 17 preguntas, se cumple con la restricción respecto del número de respuestas afirmativas que se puede escuchar en el camino.

Apéndice 1

Como usted habrá observado, las 17 preguntas me alcanzarían no solo para cubrir las 150 personas, sino para encontrar mi ubicación entre 153. Por lo tanto, al margen de empezar con el número 17, es posible comenzar preguntando a otras personas, y el resultado sería el mismo. Acá van todas las posibilidades.

a) 17, 33, 48, 62, 75, 87, 98, 108, 117, 125, 132, 138, 143, 147, 150
b) 16, 32, 47, 61, 74, 86, 97, 107, 116, 124, 131, 137, 142, 146, **149**, **150**
c) 15, 31, 46, 60, 73, 85, 96, 106, 115, 123, 130, 136, 141, 145, **148**, **149**, **150**
d) 14, 30, 45, 59, 72, 84, 95, 105, 114, 122, 129, 135, 140, 144, 147, 149, 150

Apéndice 2

Ahora, otras preguntas que uno podría contestar y que sirven para entender por qué hacen falta 17 preguntas si uno tiene 150 personas.

Fíjese en lo siguiente, que involucra un razonamiento 'inductivo'.

Voy a empezar con una sola pregunta y voy a mostrar (en el caso más fácil) que, si hay una persona en la hilera, podré encontrar mi lugar.

Ahora, aumentemos el número de preguntas: supongamos que puedo hacer *dos*. Vamos a encontrar una estrategia que permita hallar mi lugar en la fila si hay *tres* personas. Después, incrementaremos el número de preguntas hasta *tres*. En ese caso, vamos a convencernos de que con seis personas y esas tres preguntas voy a descubrir mi lugar.

Si continuamos aumentando el número de preguntas también podremos incrementar también el número de personas en la fila.

Ahora sí, acompáñeme por acá porque el argumento que voy a usar repetidamente se usa *muchísimo* en matemática.

Primer caso: Como decía, empiezo por la situación más sencilla de todas. Si me dejaran hacer *nada más que una pregunta*, ¿cuántas personas puede haber en la fila? Como es fácil ver, con una sola pregunta puedo resolverlo si hay *una sola persona.* Me acerco, le hago la única pregunta que puedo: "¿Es usted más alto que yo?". Y listo. Si me dice que sí, me ubico delante de él. Si me dice que no, me ubico detrás.

Un paso más: ¿podría encontrar mi lugar si tuviera una sola pregunta por hacer y hubiera dos personas en la fila? Fíjese que *no se va a poder*. ¿Por qué? Supongamos que le preguntara a la primera persona. Si me dijera que sí, que es más alto que yo, no hay problema. Me coloco delante de él y listo. Pero ¿si me dice que no? Entonces, no sabría si la segunda persona es más alta que yo o no, y ya no me quedan más preguntas para hacer. De la misma manera, si le preguntara primero a la segunda persona, si me dijera que no, entonces resuelvo el problema. Me ubico detrás de él (porque yo sería el más alto) y listo. Pero ¿si me contestara que sí? ¿Qué hago? Ya no tengo más preguntas, y no sé si yo soy más alto o más bajo que el primero.

Moraleja: con una pregunta *solamente* puedo resolver el problema si en la fila hay nada más que una sola persona.

Segundo caso: Supongamos que me permiten hacer *dos* preguntas. Voy a demostrar acá que puedo encontrar mi ubicación si hay *tres* personas. ¿Cómo hago?

No me conviene preguntarle a la primera persona de entrada, porque —como antes— si me contesta que sí, que es más alta que yo, me ubico delante de él y listo, pero si me dice que no, me queda una sola pregunta y tengo que ubicarme en una fila que ahora tiene *dos personas* (la segunda y la tercera). Por lo que vimos en el caso anterior,

con una sola pregunta y dos personas es probable que no me pueda ubicar. Luego, preguntarle a la primera no es una buena idea.

Por razones simétricas, no me conviene empezar por la última (le sugiero que lo piense usted para convencerse de que lo que estoy escribiendo es cierto).

Sigo yo. Si le preguntara a la última (la tercera persona), entonces si me dice que no, que no es más alto que yo, resuelvo la situación porque me ubico último. Pero si me dijera que sí, que es más alto que yo, se me presenta una vez más la situación anterior: me queda una sola pregunta por hacer y una fila de dos personas para encontrar mi lugar: la primera y la segunda. Luego, empezar por la tercera persona *tampoco* es una buena idea.

Fíjese que en ambas situaciones utilicé el primer caso: con una sola pregunta *¡no puedo resolver el caso de dos personas!*

Ahora voy a tratar de convencerla/lo de que, si le pregunto a la persona que está en el medio, la segunda, entonces *sí* voy a poder encontrar mi ubicación. Si al preguntarle a la segunda persona me contesta que sí, entonces me queda una pregunta y una sola persona (la primera) para decidir dónde ubicarme. Ya sabemos que puedo resolverlo, aunque uno tenga la tentación de hacer el análisis nuevamente. Por otro lado, si la segunda persona me dijera que no, que no es más alto que yo, entonces otra vez me queda una pregunta para usar y una sola persona para ubicarme. Ya sé que lo puedo resolver.

Moraleja: con *dos* preguntas puedo encontrar mi lugar en una fila de *tres* personas.

Con dos preguntas y cuatro personas, ya no voy a poder. ¿Por qué? Le sugiero que haga el análisis usted, pero verá que, empiece donde empiece, se tropezará con la siguiente dificultad en algún momento: tendrá *una sola pregunta*, y dos personas para encontrar su ubicación (y ya sabemos que eso no se puede resolver). Luego, con dos preguntas, puedo encontrar mi ubicación *siempre* si en total hay *tres* personas.

Tercer caso: Supongamos que me dejan hacer *tres* preguntas. Quiero convencerla/lo de que ahora se puede tener hasta *seis* personas. Le sugiero que empecemos a buscar un *patrón* que después nos sirva para los otros casos.

Si uno tiene *seis* personas y puede hacer *tres* preguntas, empieza preguntándole a la tercera. Si contesta que sí, entonces tengo dos preguntas más y dos personas (la primera y la segunda) para encontrar mi ubicación. Por lo que vimos antes, *seguro* que puedo. Si

la tercera persona me llegara a contestar que no, entonces me quedan *dos* preguntas y *tres* personas para encontrar mi ubicación (la cuarta, la quinta y la sexta). Lo bueno es que nosotros ya sabemos que con dos preguntas puedo encontrar mi ubicación cuando hay tres personas.

Moraleja: con *tres* preguntas, puedo encontrar mi lugar entre *seis* personas.

Breve resumen hasta acá:

- Con *una* pregunta, encuentro mi lugar si hay *una* persona.
- Con *dos* preguntas, encuentro mi lugar si hay *tres* personas (preguntándole a la *segunda* persona).
- Con *tres* preguntas, encuentro mi lugar si hay *seis* personas (preguntándole primero a la *tercera* persona).

Si uno tiene ahora *cuatro* preguntas para utilizar, ¿cuántas personas le parece que podrá haber en la fila? Sí, lo que usted conjetura es correcto: puede haber hasta *diez* personas.

¿A quién preguntarle primero? Como era esperable también, *a la cuarta persona*. ¿Por qué? Porque si me contesta que sí, que es más alta que yo, me quedan tres preguntas (que me sobran eventualmente) para ubicarme entre las primeras tres personas. Pero si me contesta que *no*, entonces me quedan tres preguntas y *seis* personas (la quinta, la sexta, la séptima, la octava, la novena y la décima). Ya sabemos por los casos anteriores que con tres preguntas me puedo ubicar entre seis personas. Y listo.

Con *cinco* preguntas, puedo encontrar mi lugar entre 15 personas. ¿Por qué 15? Porque 15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5. ¿Y a qué persona preguntarle primero? A la quinta. Si me dijera que sí, que es más alta que yo, tengo cuatro preguntas para ubicarme entre los cuatro primeros, y si me dijera que no, me quedan cuatro preguntas para los *diez* que tiene detrás, situación que recién resolvimos.

Como usted detecta, el patrón que se obtiene es el siguiente:

Personas	Asegurada	Asegurada	hilera
		preguntar	
		primero	
1			
2	3 (= 1+2)		
3	6 (= 1+2+3)		
4	10 (= 1+2+3+4)		

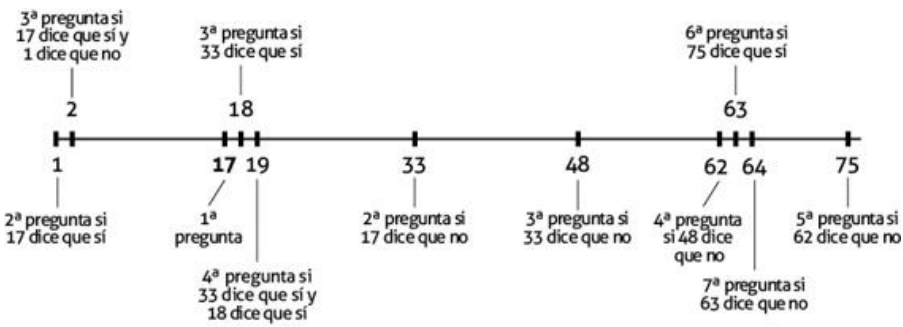
15 (= 1+2+3+4+5)
21 (= 1+2+3+4+5+6)
28 (= 1+2+3+4+5+6+7)
36 (= 1+2+3+4+5+6+7+8)
45 (= 1+2+3+4+5+6+7+8+9)
55 (= 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)
66 (= 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11)
…
136 (= 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16)
153 (= 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17)

¿Cuál es la moraleja entonces? Con 17 preguntas, uno puede encontrar su ubicación —como máximo— entre 153 personas. Por lo tanto, si en la fila había 150, *seguro* que con las 17 preguntas me voy a ubicar.

Apéndice 3

Si usted revisa ahora el Apéndice 1, verá que fui decreciendo hasta empezar con el 14. No podría empezar con el número 13 porque quedarían 16 preguntas por hacer y 137 personas. Como vimos antes, con 16 preguntas puedo encontrar mi ubicación entre 136 personas, no entre 137.

Y esto completa el análisis total.



50. En todo caso, lo que voy a tratar de mostrar es que, con *el método que propongo*, no alcanzan *menos* de 17 preguntas.

¿Las computadoras no se equivocan nunca?

Paula tiene 13 años. Hace poco descubrió un videocasete en su casa y, sorprendida, se lo llevó a sus padres tratando de entender qué era. Digo, no es que encontró un disco de vinilo de 78 rpm (revoluciones por minuto) o una radio Spika (de las primeras radios a transistores que aparecieron). No, estoy hablando de un videocasete. Los primeros emergieron en la Argentina alrededor de 1982. Todavía tengo guardadas algunas grabaciones de *Todos los goles*, el programa que hacíamos en Canal 9, y conservo en un VHS el momento de la asunción de Raúl Alfonsín como nuevo presidente. Pasó tiempo, sí, pero no 300 años, y en todo caso, desde diciembre de 1983 hasta hoy hay nada más que 32. Para Paula, no hubo vida 'analógica', todo es 'digital'. No hay vida sin computadoras ni internet.

Pero la historia que quiero contar tiene que ver con una curiosidad natural que tuvo Paula y que sospecho que tuvimos todos en algún momento. Como ella siempre nos escucha hablar (a toda la familia) de nuestros errores y nuestras dudas, la invitación constante a exhibirnos falibles, mostrarnos vulnerables, aceptar y reconocer nuestras preguntas, vivir en un permanente estado de consulta, es razonable esperar entonces que le surja la siguiente pregunta: "Todo bien, los humanos nos equivocamos seguido o, en todo caso, nos equivocamos. ¿Y las máquinas qué? ¿No se equivocan nunca?".

La verdad es que las máquinas —en general— se equivocan poco. No digo que sean infalibles, pero los errores son mucho más previsibles: fatiga de material, mantenimiento pobre, falta de presupuesto para reemplazar piezas vitales, baja calidad de algunos componentes, *etc.* En promedio, se equivocan muchísimo menos que nosotros. No me atrevo a decir que la causa de los accidentes aéreos *siempre* haya radicado en errores humanos, pero si los protocolos de seguridad fueron cumplidos y observados como indican los manuales, debería decir que *sí*, *casi siempre* fueron provocados por errores humanos.

Sin embargo, hay un ejemplo muy especial, casi increíble, que terminó involucrando a una de las empresas más grandes y de mayor prestigio en el mundo: Intel. Quizás usted nunca prestó atención, pero

es muy probable que alguno de los productos que fabrica Intel forme parte de su vida cotidiana. Es que los microchips de Intel[51] están en el corazón de su computadora, en su teléfono celular e incluso en algunos hornos a microondas. Pero me desvié.

Corría el año 1994. Lynchburg es una ciudad de menos de 75.000 personas en el estado de Virginia, a 300 kilómetros de Washington, la capital de los Estados Unidos. En la universidad local (el Lynchburg College), trabajaba Thomas Nicely, doctor en Matemática, profesor de Probabilidades y Estadística y especialista en Teoría de Números. Las aplicaciones de esta rama de la matemática a la vida cotidiana están documentadas largamente, en especial en el último par de décadas, cuando se hizo cada vez más imperiosa la necesidad de encriptar o proteger contraseñas para tarjetas de crédito, cajeros automáticos, correos electrónicos, etcétera.

Nicely necesitaba hacer algunos cálculos que involucraban números muy grandes, con muchísimos dígitos, y también números muy pequeños, con muchísimos decimales. Pero lo más relevante para él era el grado de *precisión* con el que hacía esas cuentas. En la vida cotidiana (en general) ninguna persona está atenta a lo que pasa después del segundo decimal, ya sea en el precio de los productos que compra, en el peso de una balanza o en la temperatura, por poner algunos casos. Sin embargo, poder distinguir el décimo o quincuagésimo decimal era muy importante para el trabajo de Nicely.

En ese momento, aparecieron en el mercado computadoras con un nuevo procesador, muchísimo más rápido que todos los que se conocían. Lo fabricaba Intel y se llamaba Pentium (alguno lo recordará porque llegaron para reemplazar a las 'famosas' 486). La universidad de Lynchburg compró varias computadoras[52] y Nicely supo que el tiempo que habría de invertir en sus cálculos sería muchísimo más corto.

Lo sorprendente es que con el cambio, en lugar de mejorar *todo*, empezaron a surgir varias inconsistencias… errores. Sin saber a qué atribuirlos, Nicely comenzó a descartar todas las posibilidades, incluyendo naturalmente errores en sus propios algoritmos. Pero nada parecía resolver las incongruencias. Después de haber invertido más de cinco meses en descubrir *dónde estaba el problema*, y ya —casi— desesperado, se permitió pensar algo increíble: ¿no sería un error en el chip de las nuevas computadoras?

Había una forma inmediata de comprobar si esa 'locura' podría tener asidero: excluir las Pentium y volver a las 'viejas' 486.

Nicely se sobresaltó: ahora todo parecía funcionar bien. Es cierto que tardaba mucho más tiempo, pero el resultado que obtenía era el

esperable. Era —justamente— lo que *tenía* que pasar. Entonces, había descubierto algo inesperado por completo: no era él, ¡era la computadora![53]

Obviamente, no podía quedarse con esa información sin advertírselo a la propia compañía que fabricaba los chips (Intel) y a toda la comunidad científica. El 24 de octubre de 1994 Nicely tomó la decisión y dio el primer paso: llamó por teléfono a Intel.

La persona que lo atendió se ofreció a hacer lo que Nicely le proponía. En vista de que el error se reproducía tal como él le había anticipado, el empleado le hizo una confesión que lo dejó aturdido: la empresa[54] ya había detectado el problema cinco meses antes, en mayo del mismo año. Sin embargo, le dijeron que a ellos les parecía un detalle *mínimo* y que no sería relevante para la abrumadora mayoría de los usuarios, cosa que muy posiblemente fuera cierta.

Pero ese fue solamente el principio de la historia. ¿A quién podría importarle un joven matemático inmerso en una universidad local de una ciudad pequeña de Virginia? A nadie. Y esto se replica —lamentablemente— en múltiples partes del mundo, la Argentina incluida: en la mayoría de los casos, la atención que uno recibe está en función del 'músculo' (poder, dinero) que uno es capaz de exhibir.

Seis días después, como nadie dentro de Intel le ofrecía una solución o se hacía cargo de la situación, Nicely decidió escribir un mail[55]. El mensaje era contundente y apuntaba a toda la comunidad científica y técnica: ¡cuidado con usar cualquier computadora Pentium que contuviera el chip de 66 MHz de Intel! El riesgo era enorme porque los resultados *dejaban de ser confiables*. Naturalmente, eso es lo peor que se le puede decir a alguien que necesita usar una computadora a la que tiene que 'creerle' los resultados. Nicely sabía muy bien lo que hacía.

De haber habido 'trending topics' en aquella época, el problema que Nicely denunciaba habría alcanzado esa categoría de forma inmediata, no solo en Virginia, ni en los Estados Unidos, sino en todo el mundo. Muchísima gente se ocupó de verificar y confirmar el error, que comenzó a circular con el nombre de "Pentium FDIV bug"[56].

Pero la historia continúa por la impericia de quienes estaban —en ese momento— al frente de la compañía. Tomaron una pésima decisión: aceptaron, sí, que había un error; pero amparados en que ellos sospechaban que habría de afectar a un número *reducidísimo* de usuarios, 'desafiaron' a quienes tenían una computadora con un procesador Pentium a que le 'demostraran' a Intel que el trabajo que hacían se vería afectado por ese problema. Puesto en otros términos, sería algo así como *invertir la carga de la prueba*: era el usuario quien

tenía que demostrar que lo afectaba, en lugar de la empresa reemplazar inmediatamente un producto que venía fallado de fábrica.

Eso desató un verdadero huracán. Inicialmente las protestas llegaban del lado de los individuos, de forma aislada. Hasta allí, la gente de Intel habrá pensado que podría 'tapar el sol con la mano'. Pero cometieron otro error. Y fue cuando entró en escena otro gigante: IBM. En ese momento IBM tenía en el mercado computadoras con un microprocesador (el IBM 5x86C) que competía con la línea Pentium de Intel. IBM se unió al coro de críticas, casi mofándose de sus 'rivales', y cambió la historia. Encima, el 12 de diciembre, lanzó un comunicado de prensa que decía que se *suspendían* todos los envíos de computadoras fabricadas por IBM con el procesador Pentium.

Intel recibió el golpe de IBM en las 'encías' y necesitó producir un cambio en su estrategia que resolviera no solo el problema puntual, sino también el que se avecinaba por el descrédito en el que había caído. Y encontró la fórmula que debió haber usado de entrada para evitarse el mal trago: *decidió reemplazar todas las computadoras que contuvieran ese microchip*.

Intel lo anunció el 20 de diciembre de 1994. Como era previsible, solamente un grupo muy pequeño de usuarios se acogieron a la oferta y se presentaron para que les cambiaran el procesador, pero el impacto económico y de prestigio fue tremendo: en su declaración impositiva presentada el 17 de enero de 1995, Intel informó que todo el 'affaire FDIV bug' les había costado ¡*485 millones de dólares*!

Y todo eso por no haber obrado con un poco de sentido común: aceptar el error, reconocer la falla y ofrecer el cambio, logrando que el asunto quedara circunscripto a un grupo muy pequeño (minúsculo) de usuarios. Como no denunciaron el problema —salvo internamente— y enfrentaron a la sociedad en tono desafiante, ayudaron a crear una percepción aun peor ante el público. La gente sospechó que el problema era *realmente siniestro*, cuando en realidad no lo era.

La soberbia/arrogancia de aquellos que 'casi todo lo pueden con la prepotencia del dinero' les impidió ver la solución más adecuada. Y hoy, veintiún años después, quedaron para siempre ligados con el escándalo más imponente e impresionante en la historia de la computación: un gigante como Intel, una empresa de extraordinario (y bien) ganado prestigio, tiene una mancha que pudo haber evitado con un pequeño gesto de humildad[57].

Hoy en día, cuando uno rastrea 'errores en las computadoras' en el océano de información que provee internet o en cualquier libro que haga un recuento razonable de este tipo de fallas, aún aparece inexorablemente el "Pentium FDIV bug", o sea, el error en ese

microchip.

Eso sí, después de *toda esta historia*, pude contestarle a Paula: sí, las computadoras también se equivocan, y aunque no lo parezca, el error, una vez más, lo habíamos cometido nosotros, los humanos.

51. Un microchip es una pieza de material semiconductor que contiene circuitos integrados y que se utilizan —por ejemplo— para que una computadora pueda hacer cálculos o para almacenar memoria o para seguir la lógica de los algoritmos que contienen todos los programas.

52. Las computadoras que compró la universidad eran de diferentes marcas: Dell, Gateway, Micron, Packard-Bell, Insight, pero la novedad era que todas tenían el nuevo chip.

53. La Pentium que utilizaba Nicely le daba resultados incorrectos a las inversas de dos primos gemelos muy grandes: 824.633.702.441 y 824.633.702.443. Los números que obtenía contenían un error a partir del octavo decimal.

54. Tom Kraljevic, un estudiante que trabajaba para Intel en la planta de Hillsboro, Oregon, les había advertido a los ingenieros que supervisaban su tarea que el chip *tenía un problema*.

55. www.emery.com/library/nicely.htm

56. 'Bug' en inglés significa 'pequeño insecto', pero para quienes trabajan en programación, es un error o un defecto en el software. FDIV ('floating division point', o sea, división con punto flotante) es la expresión que se usa en computación para identificar una aproximación con distintos grados de precisión.

57. Hasta el día de hoy, Intel tiene una página específica en internet en la cual publicita y advierte todos los errores para abortar un problema como el que dio origen a esta historia.

Sopa

Andrejs Dunkels fue un matemático sueco que murió muy joven: justo 45 días después de cumplir 59 años, en 1998. Además de muy bueno en su profesión, se destacó como escritor. Tiene varias frases que perduraron, pero en una de ellas logró condensar una idea muy pertinente para este siglo XXI: “Es fácil mentir usando estadísticas. Es difícil decir la verdad sin ellas”.

Después de lo sucedido en la Argentina en las dos rondas de las últimas elecciones presidenciales; o tras las de los Estados Unidos en 2016, que terminaron con Donald Trump como presidente; o, en Gran Bretaña, el caso del Brexit y su salida de la Comunidad Europea, muchos (pero no todos) de los encuestadores deben de haberse sentido mal por los resultados que ofrecieron previamente. Creo que tiene sentido reformularse algunas preguntas. ¿Qué pasó? Hubo tanta diferencia porque:

- ¿Algunos encuestadores dibujaron los resultados de acuerdo con quién ponía el dinero para solventar las encuestas?
- ¿Tomaron bien las muestras?
- ¿Tenían restricciones presupuestarias que los condicionaron para operar y conseguir los datos sin hacer concesiones respecto a la aleatoriedad de la muestra?
- ¿Todos los errores fueron ‘honestos’?[58]
- ¿La matemática que usaron fue la adecuada?

Es muy posible que usted, sí, usted, tenga otras dudas que yo no he sabido condensar entre las cinco preguntas que acabo de escribir. Ciertamente, tengo un gran respeto por los profesionales que se dedican a esta rama de la matemática de la que yo, sin ninguna duda, no soy un especialista ni mucho menos. A muchos de ellos los conozco personalmente y sé de su probidad profesional.

Por otro lado, alguna vez fui el profesor que estuvo a cargo de la materia Probabilidades y Estadística, en Exactas (UBA), por lo que tengo un conocimiento muy superficial sobre el tema. Con todo,

terminé confundido con algunos resultados. Me explico.

Hay gente que tiene interés en *encuestar a la población*, o al menos a un cierto *grupo* de la población, y pretende *obtener cierto tipo de resultados*. Es decir: no se trata de 'medir lo que pasa', sino de 'aspirar a que algo suceda' y torcer los resultados para que se ajusten al interés particular de ellos.

Hay muchas formas de lograrlo: bastaría con elegir *dónde* hacer las preguntas y confeccionar una selección tendenciosa para obtener resultados 'a medida'. Está claro que compulsar ciertas zonas de la Capital (Recoleta, por poner un caso) no es lo mismo que obtener el mismo tipo de respuestas en ciertos conglomerados de La Matanza. Aunque deploro las 'etiquetas', le pido que por ahora me las conceda (después de los resultados obtenidos, tampoco estoy muy seguro de lo que escribí en este mismo párrafo).

Hacer una encuesta seria *no es barato*. Más aún: diría que resulta *muy caro*. Pero me refiero a hacer una *encuesta seria, una encuesta bien hecha.* La próxima pregunta, entonces, debería ser: ¿Qué quiere decir 'bien hecha'?

No necesito dar una definición académica, pero hay dos componentes específicos que deben ser muy cuidados. Por un lado, importa mucho la formulación de las preguntas, aunque en el caso de la votación a presidente esta parte quedó totalmente soslayada[59]. Y por otro, hay un factor *no negociable*: la selección de la muestra. Es imprescindible que sea *al azar*. Ahora bien: elegir 1.100[60] personas *al azar* en un universo de 40 millones es un tema *altamente no trivial*.

Curiosamente, la elección de la muestra es la 'clave' esencial para que los resultados obtenidos sean extrapolables y válidos como representativos de la voluntad de esos 40 millones.

Más allá de la matemática involucrada, el otro día leí un ejemplo que me pareció extraordinario y que me sirvió para encontrar una forma de *comunicar por qué la opinión de un grupo tan pequeño de personas puede servir para inferir el resultado final*.

Acompáñeme por acá.

Suponga que le tocó cocinar una noche, digamos que para mucha gente. Es una cena de Año Nuevo o un aniversario importante. Usted es el encargado de preparar una sopa para 30 personas. Yo estoy cerca suyo y le pregunto si la sopa ya está lista. "Probá", me contesta.

Yo podría probar, pero veo que usted todavía tiene el salero en la mano y está empezando a esparcir sal en la parte superior. Si yo probara la sopa en ese momento, antes de revolver, no tendría una verdadera idea del gusto final. Más aún: podría ser que usted pusiera —en la cuchara que me va a entregar— parte de la sopa que está en la

superficie, justo a la que usted recién le estuvo agregando la sal pero todavía no revolvió. O podría seleccionar sopa de una parte más profunda, adonde la sal aún no llegó, simplemente porque no tuvo tiempo de revolver.

Podría suceder también que usted eligiera sopa que está en la parte inferior de la olla, muy cerca del fuego; en ese caso, la temperatura de la porción que yo voy a probar no reflejará cuán caliente está *toda* la sopa. O si usted eligiera una parte que está *en la superficie, muy pegada al borde,* es muy posible que no esté tan caliente (algo así como lo que hacen las 'madres con los bebés': ponen en la cuchara líquido que saben que no está hirviendo).

¿Por qué me extiendo en esta parte y lo hago con tanto detalle? Usted advierte que no sería prudente sacar una conclusión sobre la sopa si la selección que usted hace de ella es *tendenciosa*. En cambio, si la sazona bien, la revuelve bien y en la cuchara que me ofrece no hay ningún patrón especial, entonces sí, esa *muestra* de la sopa será claramente representativa de *toda* la sopa.

Y aquí la conclusión más importante que quiero sacar: resulta obvio que no hace falta que me haga probar *toda* la sopa para decirle cómo está en cuanto al sabor y temperatura. Alcanza con cualquier cucharada que usted elija.

Lo mismo ocurre con las encuestas, si uno toma la precaución de que la muestra sobre la que pretende extrapolar y sacar conclusiones generales ¡sea verdaderamente *al azar*!

En el caso de la sopa se entiende perfectamente, pero en el de las encuestas nos cuesta más, resulta totalmente antiintuitivo. Ahora quiero agregar algo que es 'no menor', le dejo a usted determinar la relevancia que tiene.

Tanto en el caso de la sopa como en el de las encuestas, hay ciertas situaciones que están más cerca de la excepción que de la norma. Verá a qué me refiero. Voy a empezar con el ejemplo de la sopa porque me parece que es más 'evidente'. A usted no se le escapa que, mientras está cocinando y llega el momento de sazonar la sopa, bien podría pasar que abra el salero y decida esparcir parte del contenido con la mano. Al hacerlo, se podría haber deslizado un *gránulo de sal más grande que el resto*, el cual, a pesar de que usted revolvió de forma normal, no tuvo oportunidad de disolverse.

Luego, podría suceder también que en la porción que usted puso en la cuchara 'justo cayera ese granito de sal'. Entonces, yo probaría la sopa y sacaría una conclusión —equivocada— pero honesta: "Mirá, la sopa está *muy* salada".

Está claro que nadie podría disputar mi conclusión, al menos *no* en

ese momento y habiendo probado *esa* cucharada de sopa.

Ahora, traslademos el problema a las encuestas. Cuando el resultado dice que el candidato A ganará la elección con un 72% de los votos y que el error de la encuesta es de *más o menos un 3%*, esto significa que en la votación final el candidato A debería obtener entre el 69 y el 75% de los votos. Hasta acá, *todo bien*. ¿Y el *gránulo de sal que era más grande*? ¿Cuándo aparece?

La matemática dice que si usted tomara 100 muestras *al azar* de 1.100 personas y les preguntara por quién van a votar, ¡en 95 de ellas el resultado estará en la franja entre 69 y 75%! Pero, y esto es muy importante, en las otras *cinco* el resultado no caerá allí. Y punto. Este sería el caso equivalente a que el grano de sal que no se disolvió hubiera caído justamente en la parte de sopa que usted puso en la cuchara. Para ponerlo en otros términos, es la forma en que la matemática estima (y previene) que el resultado no es (ni puede ser) *exacto*. La *exactitud* se podría conseguir encuestando a *todo el electorado*[61], que sería el equivalente a probar *toda la sopa*.

Para terminar, yo tengo mi conjunto de potenciales respuestas a las preguntas que formulé al comienzo, pero no estoy en condiciones rigurosas de ofrecerlas en público, sencillamente porque no tengo los datos. En todo caso, son solamente conjeturas. ¿Quién, en su sano juicio, dibujaría resultados sabiendo que la realidad los confrontaría a los pocos días? Por otro lado, estoy seguro de que, en *todos* los casos, los encuestadores conocen perfectamente la matemática necesaria (y mucho más). Pero algo *raro sucedió camino al foro*… no sé qué fue, pero que algo pasó… *pasó*.

58. Hay *otro* factor que me parece muy importante y no sé cómo juega en el momento de hacer las encuestas: ¿qué porcentaje de quienes contestan dicen la 'verdad'? ¿En qué lugar del modelo está contemplado que algunas personas, quizás muchas, no *confiesen* exactamente lo que van a hacer?

59. En el caso de una elección presidencial, con un número *n* de candidatos, hay poco margen para maniobrar si uno quiere saber por quién va a votar el encuestado. De todas formas, las preguntas podrían incluir: "¿A qué candidato usted *no* votaría?", o bien, si hubiera más de dos: "En el caso de que usted supiera que la/el candidata/o A no puede (o podría) ganar, ¿a cuál de los restantes le daría su voto?". Estos son algunos ejemplos. Estoy seguro de que usted puede aportar más.

60. ¿Por qué 1.100? Le sugiero que revise www.pagina12.com.ar/diario/sociedad/3-259427-2014-11-09.html. Allí hay una 'idea' de respuesta.

61. Y asumiendo que cada persona encuestada contesta 'la verdad'…

Problema breve pero precioso

Elija tres números enteros cualesquiera, *a, b* y *c,* de manera tal que los tres sean *distintos de cero*.

Entonces, eligiéndolos de a pares, uno puede fabricarse tres productos:

ab, *ac* y *bc*

¿Cómo hacer para convencerse de que *por lo menos* uno de esos productos tiene que ser *positivo*? Algunas ideas que conducen a la respuesta.

Idea 1

Como son tres números distintos de cero, al menos dos (y eventualmente los tres) tienen que tener el mismo signo: o son los dos positivos o son los dos negativos. El producto de esos dos será positivo *seguro*. Y listo.

Idea 2

Otra manera de pensar la solución, pero más *larga*. Si los tres productos (*ab, ac, bc*) fueran todos negativos, entonces el producto de estos tres tendría que ser negativo. Es decir:

$$(ab) \times (ac) \times (bc) < 0$$

Pero esto no puede ser cierto, porque fíjese que

$$(ab) \times (ac) \times (bc) = a^2 \times b^2 \times c^2$$

que tiene que ser positivo.

Varones, mujeres

Un atentado a la intuición. De eso se trata. Voy a plantear un problema que juega con nosotros, porque al leer el enunciado uno sospecha casi inmediatamente que la repuesta tiene que ser una que —en general— no es. Eso genera sorpresa, porque al pensar la respuesta uno se ve forzado a correrse de lo que está habituado a pensar. Supongo que allí comienza la fascinación, por la pelea interna que se produce entre lo que uno cree que tendría que pasar y lo que realmente pasa. Antes del planteo, un par de reflexiones más. La intuición, como si fuera músculo, se entrena. A medida que pasa el tiempo, cuanta más experiencia adquiere uno, mejor preparado está para imaginar soluciones. Se abren nuevos caminos que uno no sospechaba que existían y que lo hacen sentir mejor equipado para enfrentar lo desconocido.

Por otro lado, le sugiero que, una vez que haya leído el enunciado, no lea la solución, al menos no inmediatamente. ¿Qué podría perder si no se le ocurriera la respuesta adecuada? ¡Nada! En cambio, si se priva del placer de pensarlo, perderá también la posibilidad de mejorar su capacidad para intuir y, quizás algún otro día, en un contexto totalmente diferente, le faltarán en su cerebro algunas neuronas que se conectaron en el momento de pensar esto y que le habrían sido útiles para pensar distinto. En fin, usted decide.

El problema tiene muchísimas versiones. Los primeros que me lo contaron fueron Pablo Coll[62] y Pablo Milrud[63], hace más de diez años. Siempre estuve interesado en escribir sobre él, pero nunca lo hice. Los 'Pablos' me insistían en que lo planteara no solo en *Alterados por PI* en las escuelas públicas, sino también en la televisión abierta o en algún diario de alcance nacional (como *Página/12*), a fin de abarcar un grupo de personas más variado. Hoy ha llegado el momento de cumplir. Acá voy.

Suponga que, en un país de ficción, las parejas que viven allí quieren tener hijas mujeres para intentar cambiar la proporción entre varones y mujeres en la sociedad en la que viven. Para eso, votan una ley que dice lo siguiente: en el momento de procrear, si nace una nena, paran de tener hijos. En cambio, si tienen un varón, siguen

intentando hasta conseguir una mujer. Allí sí no pueden tener más hijos. La ley es votada y aprobada por unanimidad (acépteme que todo esto es parte de la ficción).

Voy a suponer un par de cosas para no complicar el análisis:

a. La probabilidad de que una madre tenga un varón o una mujer es la misma, o sea, 50% en cada caso.
b. Cada pareja tiene solamente un hijo por vez. No nacen mellizos, ni trillizos, ni hay nacimientos múltiples de ningún tipo.

Ahora sí, la pregunta que quiero hacerle: con la nueva ley en vigencia y con el paso del tiempo y la llegada de nuevas generaciones, ¿cuál terminará siendo la proporción entre varones y mujeres en ese país?

El problema no tiene ninguna trampa ni nada escondido. Si le hace falta, asuma que en ese país todos viven en condiciones ideales, en donde todos los niños (y niñas) nacen sanos, las parejas pueden seguir procreando de forma indefinida (hasta tener la nena que buscan), etcétera.

Usted ¿qué cree que va a pasar con el correr del tiempo? Si todas las parejas que comienzan a tener hijos siguieran lo que dice la ley, ¿habrá más mujeres que varones, como era el objetivo? ¿O no? Y en todo caso, cualquiera sea su respuesta, ¿por qué?

Aquí es donde yo me retiro y la/lo dejo en soledad. Eventualmente, nos reencontramos luego con algunas reflexiones.

Respuesta

No sé por dónde encaró usted el problema, pero de entrada quiero hacerle una pregunta. Tome una familia cualquiera: en el momento en el que dejen de tener hijos, ¿cuántas nenas puede haber? (*Un pedido del autor: acépteme la sugerencia y piense usted la respuesta*).

Como advierte, habrá exactamente una. ¿Por qué? Es que si dejan de intentar, es porque ya nació una nena. Si no, seguirán probando hasta que la nena efectivamente aparezca. O sea, cuando paran de tener hijos, ya tienen exactamente *una* nena. Más aún: en el momento en el que tienen 'la' nena paran de procrear; por lo tanto, 'cada familia tiene una nena, y si no la tiene todavía es porque sigue intentando y está en ese proceso que todavía no se interrumpió'.

Puesto de otra forma, hay tantas nenas como familias que ya completaron el proceso de 'tener hijos'. Eso sí: cada familia puede

tener cualquier cantidad de varones. Creo que esta última afirmación es lo que hace 'antiintuitiva' la solución a este problema. Sigo.

Supongamos ahora que uno pudiera juntar a todas las madres del país en un recinto (sigo con la ficción, pero creo que a esta altura me lo puedo permitir).

Para hacer los cálculos más sencillos, supongamos que son 4.000 madres[64]. Una vez que están todas sentadas, les pido que hagan lo siguiente: "*Todas las madres que tuvieron un hijo varón como primer hijo levanten la mano*".

Como son 4.000 madres y se supone que la distribución de sexos es mitad y mitad, hay 2.000 que van a levantar la mano: son las que tuvieron un varón. (Le sugiero que usted vaya llevando la cuenta y verá lo que sucede.)

Las que no levantaron la mano son las 2.000 restantes. O sea, contabilizando los primeros hijos de todas, hay 2.000 varones y 2.000 mujeres. La única diferencia hasta acá es que las 2.000 madres que tuvieron un hijo varón tienen la mano levantada. Las que tuvieron una hija, la dejaron abajo.

Ahora les pido que "*las que tuvieron como segundo hijo un varón levanten la mano (o la dejen alzada)*".

Pensemos juntos, usted y yo: las 2.000 madres que no habían levantado la mano después de la primera pregunta, tampoco la van a levantar ahora, porque ¡no tienen un segundo hijo! Es que las que tenían una mujer en cualquier parte del proceso terminaban de procrear. O sea, no tienen ni segundo, ni tercero, nada… no tienen más hijos y punto.

Luego, de las 2.000 que levantaron la mano con la primera pregunta (porque tuvieron un varón), la mitad (1.000) habrá tenido mujeres y, por lo tanto, ahora bajan la mano que tenían alzada. Las únicas que dejan la mano arriba son las mil que volvieron a tener hijos varones (son las que en total tienen, por lo menos, dos hijos varones… si no más).

Haciendo la suma (y le pido que por favor la haga), verá que en total tenemos 3.000 mujeres (2.000 como primera hija y 1.000 como segunda), mientras que, en el caso de los varones, hay 2.000 que corresponden a las madres que tuvieron un varón como primer hijo, más 1.000 que tuvieron como varón a un segundo hijo. Es decir, en esta instancia del proceso, hay tantas hijas mujeres como hijos varones: 3.000.

Sigo con el pedido a las madres. Yo sé que las madres con las manos levantadas hasta acá son las que tuvieron dos hijos varones como primeros dos hijos y, por lo que dice la ley, tuvieron que seguir

intentando. Les pido ahora que "*dejen la mano arriba aquellas que tuvieron como tercer hijo un varón*". Esto significa que 500 que tuvieron una mujer después de haber tenido dos varones bajan la mano (y agregan 500 mujeres a las 3.000 que ya había). Ahora dejan la mano alzada las 500 mujeres que tuvieron un tercer hijo varón consecutivo.

La cuenta total es así: 3.500 mujeres y 3.500 varones.

Creo que usted advierte lo que está pasando: en cada paso, se van agregando tantas hijas mujeres como hijos varones. La única diferencia es que las que van teniendo varones siguen intentando hasta llegar a la mujer. No importa cuántos pasos haya que dar, el número de varones y mujeres se mantendrá siempre igual: aumentará, por supuesto, porque las madres que tienen hijos varones volverán a tener más hijos, pero la proporción sigue siendo ¡uno a uno! Si —idealmente— uno pudiera seguir este proceso, eso es lo que pasaría en el caso de haber empezado con 4.000 madres (pero le sugiero que usted haga la cuenta con un número inicial cualquiera y verá que sucede lo mismo).

Acá paro. Si usted confronta con la figura 1, verá que quedan formadas dos "diagonales". Sígalas de arriba hacia abajo y verá que los números que las componen son (casi) los mismos:

Madres	**4000 madres**
Primer hijo	2000 M 2000 V
Segundo hijo	1000 M 1000 V
Tercer hijo	500 M 500 V
Cuarto hijo	250 M 250 V
Quinto hijo	125 M 125 V
Sexto hijo	63 M 62 V
Séptimo hijo	31 M 32 V
Octavo hijo	16 M 16 V
Noveno hijo	8 M 8 V
Décimo hijo	4 M 4 V
Undécimo hijo	2 M 2 V
Duodécimo hijo	1 M 1 V

Figura 1

Primera diagonal: 2000, 1000, 500, 250, 125, 63, 31, 16, 8, 4, 2, 1.

Segunda diagonal: 2000, 1000, 500, 250, 125, 62, 32, 16, 8, 4, 2, 1.

La suma de los números de cada diagonal es cuatro mil. Tuve que

hacer un ajuste en el caso del sexto hijo, porque el número 125 es impar, pero esa modificación es irrelevante cuando uno habla de la proporción final.

Moraleja

No importa con qué número de madres usted empiece, si las parejas siguieran procreando —cumpliendo con lo que dice la nueva ley—, al finalizar el proceso ¡habría la misma cantidad de hombres que de mujeres! Es decir, si la idea era que hubiera más mujeres que hombres, con esta estrategia no lo van a lograr.

62. Pablo Coll es licenciado en Matemática y doctor en Ciencias de la Computación (UBA).

63. Pablo Milrud es licenciado en Matemática y campeón argentino de Juegos de Ingenio.

64. Elegí 4.000 para hacer las cuentas más sencillas, pero si le resulta más cómodo, ponga usted el número de madres con las que quiera empezar o bien pongamos X, a fin de cubrir todos los casos.

Penales

Tengo una pregunta para hacerle. Ya sé que es *altamente improbable*, por no decir *virtualmente imposible*, que yo conozca su respuesta, pero si me acompaña hasta el final del artículo, usted podrá confrontar lo que contestó con los datos que surgen de la 'realidad'.

Llega el momento de decidir quién 'gana' un partido que está empatado (en un Mundial o Copa América o equivalente). Suelen jugarse 30 minutos de tiempo suplementario. Si aun así subsiste el empate, llega la tanda de cinco penales por equipo. El árbitro tira una moneda al aire y uno de los capitanes tiene la alternativa de elegir si prefieren patear primero o segundo (para conocer las reglas, vea las páginas 204-205).

Ahora, la pregunta: ¿usted qué haría? ¿Elegiría iniciar o esperar? Como se da cuenta, no hay una respuesta que esté *bien* y otra que esté *mal*. No. Le pregunto qué haría usted y en qué se basaría para decidir. ¿Instinto? ¿Experiencia? (si es que tiene o tuvo alguna). ¿Dependería de los jugadores que patean para su equipo o para el otro? ¿O de quién es su arquero? (Recordar Goycochea, Sergio; Mundial 90). ¿O en el del rival?

Ahora quiero agregar algunos datos que suelen ser útiles.

El arco tiene 2 metros y 44 centímetros de alto por 7 metros y 32 centímetros de ancho, y el *punto* del penal está ubicado a 11 metros de distancia de la línea del arco. Le sugiero, si alguna vez en su vida tiene la oportunidad (si no lo hizo ya), que vaya hasta un arco profesional y se ubique en el medio, mirando hacia el supuesto 'pateador'… es *muy, muy* grande un arco. Mucha superficie para cubrir.

Me gustaría enfatizar que los jugadores involucrados están entre los mejores del mundo, tanto los que patean como los que atajan. La probabilidad —en principio— debería ser de ½ (o 50%) para cada uno. El penal en sí mismo no requiere de ningún esfuerzo físico (para quien patea, en todo caso), ya que solo tiene que impactar la pelota una vez, y ni siquiera tiene que 'acertar' a un objeto en movimiento. La pelota está 'quieta'. El arquero debe tener ambos pies apoyados sobre la línea y no puede avanzar o adelantarse (reduciendo el ángulo del pateador) hasta que la pelota haya dado una vuelta sobre su

circunferencia después de haber sido impactada.

El tiempo 'promedio' (aunque esto es *siempre discutible por las diferencias entre los pateadores*) desde que la pelota sale de donde se encuentra ubicada hasta que llega al arco se estima entre 3 y 4 décimas de segundo. Por supuesto, esto depende también de la distancia que tiene que recorrer la pelota: una cosa es si sale recta, y otra, si el penal es ejecutado cerca de uno de los palos verticales.

Mientras tanto, el arquero espera como si fuera a ser 'virtualmente ejecutado'. Necesita alrededor de 2 décimas de segundo para decidir a qué lado va la pelota, y después, otro tanto para llegar hacia uno de esos palos (si es que decide no quedarse quieto, o en el medio). Más aún: aunque se arroje hacia un costado tanto como pueda, eso no le *garantiza* que pueda desviar la pelota (o atajarla). En resumen, está 'casi' condenado a que, si el penal es bien pateado, sea 'gol'.

Pero esto, como bien sabemos los argentinos, no *siempre* es cierto. Penales convertidos hay muchos (la mayoría), pero atajados y/o desviados, también. Ahora, con todos estos datos, ¿usted qué cree? ¿Es preferible ejecutar primero o segundo?

Una vez que haya contestado (y le propongo que lo haga porque, en definitiva, ¿quién mira?, ¿quién escucha?, ¿quién le lee la mente?), fíjese en lo que sigue y después dese una nueva chance para responder.

Ignacio Palacios-Huerta es un economista español de origen vasco y de renombre mundial[65]. En su vida profesional, dedicó mucho tiempo a investigar las razones psicológicas que impactan en la economía de un país o, para reducirlo a algo más comprensible (al menos para mí), la incidencia que tienen distintos factores psicológicos en las decisiones que tomamos en la vida cotidiana. Como es esperable, estas situaciones son muy difíciles de modelar. Por eso Palacios-Huerta encontró una gema para experimentar sus hipótesis: el fútbol[66]. ¿Qué puede aprender la *economía* del fútbol?

Palacios-Huerta se enfocó en el estudio de las definiciones por penales que se produjeron en toda la historia desde que la FIFA eligió ese método para definir un partido empatado en competencias internacionales de relevancia: Copa de Europa, Copa de Campeones de Europa, Copa América y Mundial. Una vez más, le pido que le ponga *particular* atención a las palabras *'toda la historia*'.

Esta metodología se implementó en 1970 y se siguió usando hasta hoy, aunque en 2003 hubo un 'ligero' cambio. Durante treinta y tres años (1970-2003), cuando se producía un empate, el árbitro convocaba a los dos capitanes, tiraba una moneda al aire y el *ganador tenía que patear primero*. Es decir, la moneda decidía quién empezaba:

no era una opción. Eso cambió en 2003. Desde entonces, el proceso es el mismo, pero el jugador que gana el sorteo *¡elige si patea primero o no!*

Su respuesta, tal como la mía (antes de leer los artículos de Palacios-Huerta y otros autores, dependiendo del año), seguramente está basada en impresiones, percepciones, ideas propias, 'corazonadas', experiencias personales… y una larga lista de 'etcéteras'. En todo caso, después de leer lo que sigue, creo que usted y yo tendremos ahora datos para fundamentar lo que elegimos.

El primer artículo fue publicado en 2008. Esto fue lo que me pareció más relevante.

1. Los autores tuvieron en cuenta 2.731 penales.
2. En total (hasta 2008) se definieron por esa vía 262 partidos en casi *cuatro décadas*… datos más que suficientes para elaborar algunas conclusiones.
3. Los equipos que patearon primero, ya sea porque ganaron el sorteo (hasta 2003) o porque eligieron hacerlo (de 2003 a 2008), ganaron el partido el *60,5% de las veces*.

¿Esperaba este resultado? ¿Qué le parece a usted: una anomalía? ¿Por qué habrá pasado o, mejor dicho, por qué pasa lo que pasa?

Si las posibilidades son las mismas, si la probabilidad es la misma, ¿por qué ganan más los que patean primero? La primera idea que se me ocurre (y supongo que a usted también) es que *tiene* que ser un problema psicológico o, si prefiere… ¡la presión!

Un día de junio de 1990, Argentina se jugaba el pase a las semifinales del Mundial de Italia. En la preciosa Florencia, el equipo argentino definía con Yugoslavia (*sí*, todavía se llamaba Yugoslavia) quién habría de enfrentar justamente a Italia, el equipo local.

Maradona me decía: "¿Te imaginás lo que significa caminar desde el centro del campo hasta el punto del penal sabiendo que hay un país entero pendiente de lo que vos hagas? Son 50 metros en los que se te cruza de todo por la cabeza, y las piernas te pesan una tonelada cada una".

Como dato colateral, Argentina pateó primero, Diego erró el penal que pateó, pero Goycochea atajó dos, y así la Selección se clasificó para jugar contra Italia (al que le ganó *también por penales*, pero esta vez en Nápoles). Me desvié.

La presión, el miedo, la inseguridad, el futuro… No solo erró Diego en instancias de ese tipo (mostrando que era humano). También fallaron (en diferentes circunstancias): Messi, Riquelme, Baggio,

Sócrates, Platini, Zico, Baresi, Raúl, Beckham, Ronaldo, Neymar, Robben, Suárez… la lista podría continuar.

Los autores ofrecen varias conclusiones que van dejando caer a lo largo de su trabajo: "Usando los datos de 1.343 penales que se ejecutaron a lo largo de 129 definiciones por penales desde 1970 hasta 2003, encontramos que quienes patearon *primero* en cada tanda lograron ganar en el 60,5% de las veces. Teniendo en cuenta que no hay ventaja *deportiva* en la ejecución, el único elemento que nos permite atribuir esta diferencia es que el *orden en el que sucedió cada secuencia tiene un efecto psicológico indisputable*".

Hay otra cosa muy interesante y que tiene un impacto muy fuerte, aunque parezca intangible. En la medida en que la mayoría de los tiros se convierten, quien patea primero suele *romper un empate y se pone adelante en el marcador*.

En cambio, quien patea segundo puede aspirar —de máxima— a igualar el resultado. Y acá me permito incluir una observación: es preferible patear primero porque tu equipo tiene no solo la oportunidad de marcar el gol, sino que, eventualmente, ante el error, te queda la alternativa de que tu arquero llegue a atajar el penal que sigue y corrija el fallo. En cambio, quien patea segundo *no tiene otra chance*.

Otros datos ilustrativos. La cantidad de goles que se convierten en los primeros tiros de *los dos equipos* va declinando a medida que se aproximan al cuarto y al quinto penal. Eso sucede para los dos, pero más se nota en el equipo que patea segundo. Por otro lado, el equipo que pateó primero se impuso en casi un 66% de las veces en que la tanda de penales llegó hasta cinco o menos. Es decir: no hubo que seguir pateando series de a uno por vez. Cuando se llegó a esta situación, quien pateó primero ganó en un 55,5% de las veces (un 5% menos). Más aún: el equipo que patea primero parte con un 60,2% de posibilidades de ganar, pero, si convierte el *primer* penal, estas aumentan hasta un 67,3%, y si lo *erra*, decrece hasta un 33,3%.

Con el tiempo, aparecieron otros investigadores[67] que incluyeron más torneos, más partidos y más definiciones. La última publicación de Palacios-Huerta es de 2014, y en ella llevó su análisis a 1.001 (mil un) casos. El porcentaje sigue superando el 60%.

Fíjese que, mientras el árbitro tira la moneda, la televisión hace un corte para pasar la tanda comercial. ¡Están locos! Justo en *ese preciso momento* se está definiendo en un 60-40 el ganador del partido.

Es por eso que, para modificar esa realidad, el científico español propone lo siguiente. Si dos equipos A y B tienen que desempatar, luego de que el árbitro tire la moneda para que el ganador elija si tira

primero o no, la secuencia (en lugar de alternar un penal por equipo) debería ser la siguiente[68]:

A-B-B-A-A-B-B-A-A-B

Final a toda orquesta. Mientras no había datos, estuvo bien experimentar. Con las estadísticas a la vista, sería *necio* no modificar el método. ¿Usted qué piensa? ¿Cambiaría la respuesta que me dio al principio?

Las reglas

1. Cada equipo establece un orden con el que enviará a patear tiros desde los once metros a *todos* los jugadores que terminaron jugando el partido. Si hubo jugadores expulsados, no podrán participar, y los que fueron reemplazados, tampoco. El arquero *también* tiene que estar incluido en esa lista.
2. Los primeros cinco de cada lista son los que *seguro* van a patear (salvo que el resultado quede determinado antes, por ejemplo, si un equipo convierte tres y el otro erra tres).
3. El árbitro, con los dos capitanes y jueces de línea como testigos, tirará una moneda al aire después de que uno de los capitanes elija cara o ceca.
4. El ganador *elige* si patea primero o espera que el otro equipo ejecute primero.
5. Los pateadores se van alternando. Es decir, un equipo patea los penales de número impar (1, 3, 5, 7 y 9) y el otro patea los pares (2, 4, 6, 8 y 10).
6. Si ejecutados los *diez* penales sigue habiendo un empate, cada equipo sigue enviando *de a uno* a los jugadores de su lista y se van alternando, uno por equipo, hasta que haya un desenlace.
7. No puede repetirse un ejecutante hasta que no hayan pateado *todos* los jugadores de cada lista, y luego se *respeta el orden anterior*.

65. Palacios-Huerta se graduó en la Universidad de Chicago, trabajó durante muchos años en Brown University en la ciudad de Providence, Rhode Island, Estados Unidos, y actualmente está radicado en Londres. Allí es profesor en la London School of Economics (Escuela de Economía de Londres).

66. También el ajedrez, pero esa es otra historia.

67. Kocher, Lenz y Sutter publicaron en 2012 otro trabajo que extendió el original de Palacios-Huerta (que llegaba hasta 2003). El porcentaje se redujo a 53% y los autores ampliaron el número de torneos a 540 definiciones.

68. Este método es el que se usa, por ejemplo, en los tie-breaks en el tenis.

Modelo

Si usted escucha hablar hoy de GPS[69], estoy —casi— seguro de que son iniciales que ya no necesitan explicación, algo así como lo que sucede con las 'palabras' CONICET, INVAP, MINCyT o AFIP[70]. La tecnología, que en algún momento fue de punta, se va infiltrando en nuestras vidas cotidianas y queda incorporada como algo *natural*.

Lo curioso, y a la vez muy frustrante, es que en ciertos casos la matemática involucrada queda *escondida* o parece inabordable, abonando un poco más esta idea tan repetida y absurda de que solo es accesible a un grupo de privilegiados. En general, las ciencias sociales se han ganado un respeto muy particular dentro de la sociedad, pero son las ciencias duras las que 'no tienen quien les escriba'. El país necesita más jóvenes dedicados a las ciencias llamadas 'duras', donde la desocupación (incluso *antes* de graduarse) es virtualmente nula. Necesitamos más jóvenes estudiando ingeniería, física, química, matemática, programación, criptografía, tecnología satelital y de radares, aviónica, nanotecnología, física nuclear, en fin, muchas áreas más que, si las escribo, terminaría haciendo una suerte de 'guía de carreras posibles'.

Pero hay que empezar por lo básico, por enseñar desde la escuela primaria a contar… sí, a contar: estudiar combinatoria, probabilidades y estadística. Y necesitamos empezar *ya*, de forma orgánica y con alcance nacional. El Estado tiene que garantizar el acceso a *todos los estudiantes del país a las herramientas imprescindibles para transformarse en alfabetos del siglo XXI*, donde no alcanza con saber leer y escribir. Casi todos los niños saben lo que es un videojuego, un teléfono celular, una tableta o una laptop, pero *no todos los niños tienen acceso*, y hoy la educación de ese tipo es tan irreemplazable como tener agua corriente, electricidad y cloacas, tanto como tener conectividad y comunicación vía internet. El país necesita cada vez más jóvenes que sepan programar, idear algoritmos, resolver problemas concretos que solo requieren de una matemática que hoy se transformó en básica pero que además es *muy entretenida*. Y no importa que lo diga yo ni nadie: la educación es un derecho humano que debe garantizar el Estado, y eso también es *irreemplazable e irrenunciable*.

Ahora, quiero invitarla/lo a pensar. Suponga que tiene delante de usted un mapa de una ciudad. Para hacer el análisis más sencillo, supongamos que no hay diagonales ni cortadas; son todas calles que corren de forma horizontal o vertical, conformando una grilla rectangular, como se ve en la figura 1.

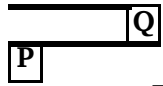


Figura 1

Este es un ejemplo de *tres* calles que corren de forma horizontal y *cinco* que lo hacen de forma vertical.

Suponga ahora que usted está en la casilla **P** y quiere llegar hasta la posición **Q**. ¿Cuántos caminos posibles hay para ir desde **P** hasta **Q** si uno solamente puede moverse 'hacia la derecha' o 'hacia arriba' en cada calle? O sea, la restricción es que no se puede ir ni para abajo ni para la izquierda: ¿cuántas maneras posibles hay? ¿Quiere pensar usted? Fíjese que no le pido que escriba *todos los caminos* sino que me diga *cuántos hay*.

Naturalmente, uno puede sentarse y hacer una lista con *todas* las posibilidades y después contarlas. No estaría mal: en este caso, no sería tanto problema porque los números son pequeños, pero ¿se imagina en una ciudad con cientos de calles horizontales y verticales?

Lo ideal sería poder encontrar una manera de contar las posibilidades en un caso general, para cualquier cantidad de calles horizontales y verticales. Dicho de otra forma, un método que sirva para poder usarlo en una situación real. Y acá, como muchas otras veces, ¿cómo hacemos para contar casos generales si no tenemos idea de cómo hacer en casos sencillos?

Quiero proponerle una idea, entonces, una forma de diseñar un *modelo* o una *estrategia* para contar los caminos *sin importar* cuáles son. Elija un camino cualquiera que vaya de **P** a **Q**. Por ejemplo, el que primero sube dos veces y después va cuatro casillas hacia la derecha. Si yo llamara con la letra A al hecho de ir para 'arriba' y D al de moverme hacia la 'derecha', entonces podría escribir ese camino como

AADDDD

Esto significa que empiezo en **P** y voy hacia 'arriba' dos veces. Cuando llego allí, a la casilla superior izquierda, no queda más alternativa que ir *cuatro veces hacia la derecha*, ya que no se puede ir ni

para abajo ni para la izquierda.

Otros ejemplos de 'posibles caminos' podrían ser los siguientes:

(*)
ADADDD
DDDDAA
DADADD

Creo que usted ya detectó lo que estoy haciendo: he cambiado la pregunta original. No se trata ahora de contar cuántas formas posibles hay de ir desde **P** hasta **Q**, sino de contar de cuántas formas puedo escribir una *tira* de seis letras, de las cuales cuatro son letras D y dos son letras A**.**

Esto es lo que esencialmente se llama 'modelo', o *modelar* una situación. El problema ahora es mucho más fácil de abordar, y si encontramos una forma de contar todas estas 'tiras' quizás podamos generalizarlo cuando el número de calles horizontales y verticales no sea tan pequeño.

Dos preguntas:

1. ¿Cuántas formas posibles hay *entonces* de ir de **P** a **Q**? Esta es la primera pregunta porque todavía no la contestamos.
2. ¿Y si en lugar de ser una grilla de 3×5 fuera de 30×50? ¿O de 123×4.798? ¿Cómo aprovechar la experiencia anterior?

De esto se desprenden dos cosas: por un lado, está muy bien *modelar un problema*, pero después hace falta *resolverlo*, y uno aspira a que el modelo ayude a facilitar el proceso. Por otro lado, sería interesante poder aprovechar el ejemplo que involucra números más pequeños para pensar cómo resolver un problema equivalente con cualquier número de calles horizontales y verticales. Algo así como *generalizar* la solución de un problema.

Para la primera pregunta, fíjese en los ejemplos (*). Imagine que hay *seis casillas vacías* en las que yo fui poniendo 'cuatro' letras D y 'dos' letras A. En realidad, basta con saber dónde están ubicadas las dos letras A, ya que las letras D ocuparán los lugares que quedan vacíos. Es decir: *se trata de contar de cuántas formas posibles se pueden distribuir las dos letras A en las seis casillas*. Eso es todo lo que necesito. ¿Quiere pensarlo usted por su cuenta?

Mientras tanto, sigo yo. Elija una casilla cualquiera donde va a poner la *primera* letra A, no importa cuál, seleccione una. ¿Cuántas formas tiene de elegir esa *primera* casilla? Como usted advierte, hay

seis maneras posibles.

Una vez que la eligió, *todo* lo que le falta es elegir *otra* casilla, que es donde usted ubicará la *segunda* letra A. ¿Cuántas formas hay? (le dejo tiempo para que lo piense). Sí, quedan cinco libres. ¿Por qué? Una de las seis casillas ya tiene la letra A que usted ubicó primero. Es decir, para cada una de las formas de ubicar la primera letra A hay cinco lugares libres para la segunda A. En total son $(6 \times 5) = 30$. Pero esto contiene un pequeño 'error'. ¿Cuál es?

Es que estoy contando *dos veces* lo mismo, porque las dos letras A son *indistinguibles*. Si usted hiciera la lista de las 30 'tiras' posibles, advertiría que todas aparecen repetidas, y eso sucede porque no tenemos manera de diferenciar una letra A de la otra. Luego, al resultado total hay que dividirlo por *dos*… ¡y listo! La respuesta entonces es que hay 15 'tiras' distintas de seis lugares, de los cuales dos corresponden a letras A, y cuatro, a letras D. Con este modelo, entonces, se deduce que hay 15 *caminos* posibles para ir desde **P** hasta **Q**.

¿Y ahora? Veamos cómo hacer con los casos más generales. Si tuviéramos tres letras A y ocho letras D, ¿qué pasaría? Lo mismo: habría que contar las formas de ubicar *tres* letras A en tiras que tienen 11 casilleros (tres para las A y ocho para las D). Luego, tendríamos 11 lugares para la primera letra A, 10 lugares para la segunda A y nueve para la tercera. Quedan:

$$11 \times 10 \times 9 = 990 \text{ en total}$$

Acá aspiraría a que usted me dijera: "¡Un momento! ¡Está contando de más!".

Y tendría razón. Pero ahora ya no tendría que dividir por dos: debo contar de cuántas formas se pueden intercambiar las tres letras A entre ellas, porque no voy a poder darme cuenta de la diferencia. Es decir, tengo que encontrar alguna forma de contar *todas las tiras repetidas*, y para eso necesito ver cuántas formas posibles hay de intercambiar las tres letras A (ver 'Subnota').

Me adelanto: hay *seis* formas. Por lo tanto, hay que dividir el número 990 por seis: el resultado es 165. Moraleja: hay 165 caminos posibles para ir desde **P** hasta **Q** si tuviéramos que movernos tres casilleros hacia arriba y ocho hacia la derecha[71].

Para terminar, algunas observaciones breves.

a. Usando el mismo modelo y la misma idea, uno puede resolver el caso de *cualquier número de calles horizontales y verticales*.

b. En la vida real, con los datos que ofrece el tránsito y agregando restricciones que aparecen cuando las calles *no son de doble mano*, el algoritmo se vuelve un poco más sofisticado, porque hay ciertas casillas en las que no puede ir una letra A u otras que no pueden tener una letra D, pero la *idea* general es siempre la misma.

Modelar es encontrar una forma alternativa de pensar un problema. Encontrar un buen modelo no es algo *trivial*, pero una vez que uno lo encuentra a partir de un caso particular o pequeño, tiene la garantía de que al extrapolarlo podrá resolver el problema general. Por último, cuanto más sencillo sea el modelo, será también más sencillo de programar y más fácil (y rápido) de ejecutar por una computadora… o un GPS.

Subnota

Para pensarlo, conviene 'distinguir' artificialmente cada una de las tres letras A. Las voy a llamar A1, A2 y A3.

Como hice antes, ¿en cuántos lugares puedo ubicar la letra A1 en una tira que ahora puede contener *tres* letras? Respuesta: tres lugares. ¿Por qué? Como es la primera letra que voy a ubicar, están los tres lugares disponibles. Una vez que ubiqué la A1, ¿cuántos lugares me quedan para la A2? Como usted advierte, quedan *dos* lugares libres. Es decir, por cada uno de los tres lugares en donde puedo ubicar A1, quedan dos lugares para poner A2. En total, hay $(3 \times 2) = 6$ posibilidades.

La última letra A, la A3, no agrega ninguna información, porque no tengo ninguna libertad para ubicarla. Una vez que ya puse A1 y A2, la restante se ubica en la única casilla que queda vacía.

Moraleja: cuando uno tiene *tres* letras A, entonces hay $(3 \times 2) = 6$ formas de distribuirlas[72]. Con este dato, ahora sabemos que cada combinación de tres letras A y ocho letras D aparece seis veces y, por lo tanto, al resultado de 990 hay que dividirlo por 6 hasta obtener 165 caminos posibles.

Otro modelo[73]

"Adrián, en este problema, tal vez por la introducción que hiciste en donde hablás del GPS y de la necesidad de enseñar a programar, por algún motivo pensé que ibas a plantear la solución en términos de

programación dinámica.

”Para contar la cantidad de caminos de **P** a **Q**, la forma de encararlo con programación dinámica es escribir en cada casilla de la matriz (de la ciudad) la *cantidad de caminos* que llegan hasta esa casilla.

”Partiendo de **P**, lo primero que uno puede hacer es completar la columna izquierda y la fila inferior con ‘1’, porque hay una única forma de llegar a esas casillas. ¿Por qué? Para cualquier casilla que esté en la primera columna, la única forma de llegar es desde abajo, y para todas las casillas de la última fila, hay una sola forma de llegar: desde la izquierda. Es por eso que al principio la grilla resulta así:

1
1
1

1

”Ahora, para cualquier otra casilla, uno puede llegar desde la izquierda o desde abajo. ¿Qué dice esto? Elegí una celda cualquiera. Si querés saber de cuántas formas se puede llegar hasta allí, entonces todo lo que tenés que hacer es ‘sumar’ los dos números que figuran en la casilla de la izquierda y en la de abajo, *ese* es el número que ponés en la nueva celda.

”Con esta premisa, uno puede empezar a completar el rectángulo. Queda así:

1
2
1

Luego:

3
3
1

Al terminar, queda así:

”Este método se llama *programación dinámica* porque uno va solucionando instancias más pequeñas para llegar a la solución del problema original. Lo bueno de la solución con programación dinámica es que se aplica a los casos en que hay casillas por las que *no se puede circular*, o calles con *sentido único*, por ejemplo.

”Por último, Adrián, algo muy importante: planteado de esta forma, es muy simple de programar, ya que solo requiere recorrer las casillas en orden e ir sumando.

”Fijate otro ejemplo. Si vos tenés 4 filas y 9 columnas, el rectángulo queda así:

”Por supuesto, llegamos a la misma solución…”.

Dos puntos importantes

a. Este modelo muestra la variedad de posibilidades que uno puede encontrar cuando pretende resolver algún problema. Quizás a usted, si pudo pensar el problema *antes* de leer las soluciones que aparecen acá, se le ocurrió algo distinto… y si lo logró, estoy seguro de que *ese* particular momento ¡no tiene precio! (para usted).
b. Un detalle *muy importante* para tener en cuenta sobre este modelo, y que Carlos Sarraute se ocupó de enfatizar: al contar la cantidad de caminos con los que se puede llegar desde **P** hasta **Q**, uno puede incluir las obstrucciones que haya, como calles cortadas o que van en un solo sentido. El primer modelo, ciertamente, no contempla esas posibilidades.

69. GPS es el acrónimo (en inglés) para Global Position System, o sea, Sistema de Posicionamiento Global.

70. CONICET: Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas; INVAP: Investigaciones Aplicadas; MINCyT: Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación Productiva; AFIP: Administración Federal de Ingresos Públicos.

71. Aquellos que tengan un conocimiento 'ligeramente' más avanzado, sabrán que para calcular el número de permutaciones 'con repetición' de *tres* letras A y *ocho* letras D se usa la fórmula $(11!/(8! \times 3!)) = (11 \times 10 \times 9)/(3 \times 2) = 990/6 = 165$.

72. El número de combinaciones posibles se corresponde con lo que se llama factorial del número 3, o sea, $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$.

73. El último día de junio de 2017, recibí un correo electrónico de Carlos Sarraute en el que me proponía *otro* modelo. Quiero incorporarlo acá con su autorización (Carlos es uno de los betatesters de este libro, junto a Carlos D'Andrea, Juan Sabia, Alicia Dickenstein, Gerry Garbulsky y su hijo Julián, Claudio Martínez y Manu Ginóbili).

La blusa y el billete (robado) de cien pesos

Hay ciertos problemas de lógica que tienen un atractivo especial. Uno los mira, los lee, los entiende, los resuelve y después… *duda*. Digo, duda de la conclusión a la que llegó. Parecería que en alguna parte hay 'trampa'. Pero no, verá que, en el caso que le voy a proponer, todo está a la vista y es muy sencillo. Eso sí: cuando haya terminado de leerlo, pensarlo, entenderlo y resolverlo, le sugiero que usted, por su cuenta, trate de dilucidar por qué nos pasa los que nos pasa. ¿Qué es lo que confunde? Si es *tan* sencillo y *tan* elemental, ¿por qué uno duda de la respuesta? Me explico.

Hace unos días, Alicia Dickenstein me envió un mail desde Oslo. Yo no tengo cuenta de Facebook, de Twitter ni de Instagram… nada. Sé que me debo estar perdiendo algunas cosas, pero también sé que tengo una gran tranquilidad: no necesito de las redes sociales. No interprete que estoy en contra porque no es cierto, solo que yo siento que no las necesito. Pero vuelvo a Alicia, quien desde hace un par de años es una de las vicepresidentas de la IMU (Unión Matemática Internacional). Transcribo su correo electrónico:

> Adrián, acabo de ver en Facebook que está circulando este problema. Creo que te va a interesar. ("Sí, me interesa", pienso). Una mujer entra en un negocio de ropa para mujeres. Mientras va caminando observa que la caja está abierta y sobresale un billete de 100 pesos. Mira alrededor y no ve a nadie. Rápidamente, retira el billete y se lo pone en un bolsillo. Y se va. Un par de horas más tarde, vuelve al mismo negocio. Había visto una blusa que le había interesado. Se acerca al estante y retira la que corresponde a su talle. La lleva a la caja. La etiqueta indica que el precio es 70 pesos. Paga con el billete de 100 y el cajero le devuelve —como es esperable— 30 pesos.

Ahora tengo una pregunta para usted: ¿Cuánto dinero perdió el negocio? (y vea estas potenciales respuestas):

a) 30 pesos
b) 70 pesos
c) 100 pesos
d) 130 pesos

e) 170 pesos
f) 200 pesos

¿Usted qué cree?

Como se da cuenta, el problema es muy sencillo de entender (creo). Si estuviera cerca suyo, le propondría: "¡No lea lo que sigue!". ¿De qué le serviría? Como no estoy allí, no le puedo decir nada, pero créame que lo pienso. Ahora sí, le toca a usted.

Alicia se ocupó en enviarme varias de las respuestas que estuvieron (¿están?) circulando en internet. Leí solo algunas y, si pudiera, me gustaría poder pensar la solución junto a usted. ¿A qué conclusión llegó? Me apuro en escribir que la respuesta 'correcta' es 100 pesos, pero con un *asterisco*. ¿Por qué?

No sé cuál fue su línea de razonamiento, pero acompáñeme con esta idea. Suponga que el robo no hubiera existido. En ese caso, el negocio no habría perdido nada. Reemplaza la blusa por los 70 pesos que habría pagado la mujer y le entrega los 30 pesos como vuelto del billete de 100 pesos con el que ella pagó. Es decir, *sin robo no hay pérdida del negocio*.

Pero como sabemos que *sí* hubo robo, el negocio perdió esos 100 pesos que la mujer sustrajo de la caja. ¿Por qué habríamos de tener la tentación de mezclar los dos episodios? ¿Será porque está la misma mujer incluida? Cualquiera sea la razón, son dos situaciones independientes: si no hay robo, el negocio no pierde nada. Si *hay* robo (como lo hubo), el negocio pierde *exactamente esos 100 pesos que le robaron*.

Todas las otras opciones son para confundir y, de hecho, por lo que estuve leyendo, ¡lo logran!

¿Por qué el *asterisco*? Quizás usted pensó que, en realidad, si bien el negocio *perdió* los 100 pesos, hay *algo* que uno no está contabilizando. ¿Quiere pensar por su cuenta?

Sigo yo. Cuando el negocio decidió que vendería la blusa al público por 70 pesos, está claro que no le puede haber costado lo mismo: usualmente, los negocios tienen algún margen de ganancia.

Para hacer las cuentas más fáciles, supongamos que el negocio le paga al fabricante *60 pesos* por ese tipo de blusas, y que las ofrece al público por 70. En cada operación, entonces, *está ganando 10 pesos*.

Luego, cuando la mujer ingresó en la tienda y compró la blusa, el negocio ganó 10 pesos. Como el billete de 100 pesos con el que la pagó les fue robado a ellos, eso significa que, en realidad, el dueño del local perdió 90 pesos, no los cien. Hablando de opciones, entre perder los cien pesos en efectivo por un lado o perder la blusa más los 30

pesos, *seguro que le conviene* la última alternativa: son 100 pesos contra 90.

Es por eso que puse el asterisco, pero esa es una variante *técnica* que no debería confundirla/lo. Lo interesante es que, por la forma en las que están presentadas las opciones, parecería que los dos hechos están relacionados y, por lo tanto, la tentación es decir —por ejemplo — que el dueño perdió 130 pesos, porque le robaron 100 y encima tuvo que poner 30 pesos para entregar el vuelto.

Usted verá qué argumento la/lo hace sentir más cómodo, pero quería compartir el problema, porque me parece que *muchas veces*, frente a una situación cualquiera, tenemos la tendencia de involucrar un exceso de información que solamente introduce *ruido* y no claridad. En este caso, me pareció que era una buena idea para entretenerse.

Extracciones en un banco

Cuando yo era chico, en la contratapa del diario *La Razón*, salía (no recuerdo con qué periodicidad) lo que se llamaba "El Juego de los Siete Errores". Consistía en dos dibujos que eran —en apariencia— similares, pero el segundo incluía siete variaciones con respecto al primero. La idea era tratar de encontrarlos en un plazo razonable (supongo que por 'plazo razonable' se entendía 'antes de que saliera el diario del día siguiente'). El hecho es que, junto con *Don Fulgencio* —creación de Lino Palacio—, *Isidoro* (Cañones), *Pelopincho y Cachirula* y el *Divúlguelo* —Fola—, *Lindor Covas, el Cimarrón, Ramona* y no sé quiénes más, la vida transcurría con el entretenimiento que (me) proveía esa página del *vespertino* (¡qué antigüedad!).

Vuelvo al tema que me ocupa. Encontrar *esos* siete errores formaba parte de un pasatiempo diario. Hace un par de años estábamos en una reunión de producción de *Alterados por Pi*. Invariablemente empezábamos de forma muy calma y ordenada, pero en poco tiempo las reuniones se volvían apasionadas, acaloradas, comprometidas, y productores de televisión, directores de cámaras y de cine, sonidistas, matemáticos, expertos en ciencias de la comunicación, doctores en computación, especialistas en diseño gráfico, físicos, arquitectos, creativos, escenógrafos… (entre las profesiones que me acuerdo) pugnábamos por defender una idea. Pocas veces trabajé en un programa en donde convergiéramos desde tan diferentes lugares, pero también pocas veces noté tanta gente con la 'camiseta puesta', sabiendo que recorríamos el país haciendo un programa de televisión en las escuelas, en cada una de las provincias argentinas.

Estoy seguro de que a usted no se le escapa que elegir los problemas para presentar en auditorios que albergan entre 1.000 y 1.500 personas, poblados de chicos de múltiples edades y de variadísimos intereses, es una tarea 'altamente no trivial'. Es por eso que seleccionar *los seis temas* que se desarrollan en un programa es una tarea que lleva *muchísimo* tiempo, mucho más del que usted se imagina: discusiones, debates, prueba y error, 'llevar la matemática a la televisión', los ángulos que no dan, los planos que 'tampoco', la luz, la posición de las cámaras y, sobre todo, la propia calidad del tópico a

presentar.

Justamente, en una de esas reuniones, fue Pablo Coll quien me aportó el problema que quiero plantear acá. Es un problema *extraordinario*, en el sentido 'literal' de la palabra: fuera de lo ordinario. Empecé esta nota recordando "El Juego de los Siete Errores", aunque en este caso no le va a hacer falta encontrar siete: solamente tendrá que encontrar *uno*.

Una última cosa, breve: si normalmente le pido que no lea la respuesta antes de ofrecerse un mínimo de tiempo para pensarlo, en este caso se lo pido con un poco más de énfasis: no se trate mal a usted misma/o. No hay nadie que la/lo esté mirando. Es usted y el mundo. Lea lo que sigue y verá que, 'salvo que conozca el problema de antemano o se le ocurra inmediatamente', le va a pasar lo que le sucedió a la abrumadora mayoría de las personas a quienes se lo planteé: "¿Cómo? ¡Dejame leer de nuevo! ¡No puede ser! ¡Tiene que haber un error!".

Sí, claro que hay un error. La idea es que usted lo descubra. Acá va.

Suponga que usted tiene 1.000 pesos en una cuenta bancaria. Por otro lado, tiene una libreta en la que va apuntando el importe de las extracciones que hace y el saldo que resulta después de cada extracción. Acompáñeme entonces a continuación con las dos listas que voy a hacer. La primera columna corresponde a las extracciones que fue haciendo, una por una. La segunda columna contiene el saldo restante. Esta es una 'foto' de lo que sucedió en el último mes. Recuerde que en la cuenta había, originalmente, *1.000 pesos.*

Extracciones	Saldo
Primera	$500
Segunda	$250
Tercera	$100
Cuarta	$50
Quinta	$20
Última	$10
	$990

Es decir, el total de la columna de la izquierda suma 1.000 pesos. En cambio, la columna de la derecha suma 990 pesos. Pregunta: ¿dónde están los 10 pesos que faltan?

Ahora le toca a usted.

Antes de escribir la respuesta, quiero plantearle el mismo problema pero *variando* el importe de las extracciones. Fíjese lo que pasaría si las extracciones fueran estas:

Extracciones	Saldo
Primera	$800
Segunda	$700
Tercera	$400
Cuarta	$200
Última	$100

¿Qué pasa ahora? Haga las sumas, por favor.

Verá que si usted suma los números que figuran en la columna de la izquierda, el resultado es 1.000. Esto era esperable: teniendo en cuenta que usted, aunque fue retirando dinero de diferentes maneras, lo retiró todo, al final la suma total *tenía que ser 1.000 pesos*.

Si ahora una suma la columna de la derecha, el resultado es ¡2.000 pesos!

¿Y? ¿Hay algún error ahora? ¿Quiere pensar el problema por su cuenta?

Sigo yo. Aspiro a que en este momento usted ya haya pasado por esa sensación de "Ah… ¡Ya sé lo que pasa!". Claro, ¿qué sentido tiene sumar la columna de la derecha? La segunda lista lo único que hace es expresar el dinero de los 'saldos', y esos números ¡no tienen por qué sumar mil! Son solamente números de referencia, para que usted sepa cuánto dinero hay en la cuenta ¡y nada más! Lo único que importa de esa columna es el saldo *individual después de cada extracción*. Lo que sume es totalmente irrelevante. Por eso yo fabriqué un segundo ejemplo para invitarla/lo a que dedujera por su cuenta lo que había pasado.

Es curioso, ¿no? La reacción que uno debería esperar frente al pedido de sumar la segunda columna es ¿por qué? ¿Para qué sumar esos números? Sin embargo, lo que —quizás— le pasó a usted es lo que nos pasó a casi todos: uno se 'somete' al principio de la autoridad (supuesta). Si alguien me plantea: "Sumá estos números y comparalos", uno pierde la sensatez por un ratito y acepta la pregunta como válida cuando, en realidad, debería rechazarla inmediatamente porque carece de sentido.

En definitiva, no pretendió ser más que un 'pasatiempo' o un 'entretenimiento', como los que aparecían en el diario *La Razón*.

La madre sabía… (un problema de lógica)

La madre deja una torta encima de la mesa. Les dice a sus hijos que tiene que salir por una hora y les *pide* que por favor no la toquen, que esperen, que es la torta que va a usar para el cumpleaños (que celebrarán más tarde). Los niños se llaman Alberto, Bárbara, Carolina y David.

Como la madre suponía, al regresar *falta una parte de la cobertura de chocolate*. Deprimida porque no supo transmitir lo que quería, les pregunta lo obvio: ¿quién fue? Los niños saben que solamente uno fue el culpable, y cada uno se dispone a decir la verdad excepto quien, en lugar de hacerse responsable, miente.

La madre obtuvo estas respuestas.

a. Alberto dice que fue Bárbara.
b. Bárbara dice que fue Carolina.
c. Carolina y David dicen que ellos no vieron lo que pasó, que estaban mirando televisión.

¿Quién fue?

Como usted advierte, no hay muchas alternativas. Solo le pido que se concentre un rato y verá que se le va a ocurrir —casi— inmediatamente. Si no, tampoco pasa nada. Yo escribo mi forma de abordarlo en el párrafo que sigue.

Solución

Como queda claro que *uno* solo de los niños fue el responsable, voy a ir suponiendo que el culpable fue cada uno de ellos y verificar en cada caso si esa suposición es consistente con los datos.

Supongamos que fue Alberto.

En ese caso, lo que dijo Alberto es falso y, por lo tanto, sabríamos que Bárbara no fue. Pero si Alberto fue el culpable, eso significa que los otros *tres niños son inocentes* y, por lo tanto, lo que dijeron es cierto. En particular, lo que dijo Bárbara tendría que ser verdadero,

pero no lo sería: ella afirmó que Carolina fue la culpable, y sabemos que el culpable es Alberto. Luego, habría dos mentirosos (Alberto y Bárbara) o dos culpables (Alberto y Carolina).

Moraleja: *seguro que Alberto no fue.*

Supongamos que fue Bárbara.

En ese caso, Alberto dijo la verdad (que fue Bárbara), y las afirmaciones de Carolina y David no contradicen que hubiera sido Bárbara: ellos no vieron lo que pasó. En consecuencia, suponer que fue Bárbara no contradice nada y es una *gran candidata* a ser la culpable.

Supongamos que fue Carolina.

En ese caso, lo que dijeron los otros tres tendría que ser verdad, pero entonces cuando Alberto acusa a Bárbara estaría mintiendo, y Carolina, quien sería la responsable, también. Luego, *Carolina no puede ser*.

Por la misma razón, tampoco pudo haber sido David, porque entonces Alberto y Bárbara deberían haber dicho la verdad. Conclusión, esto no pudo pasar. Luego, *David no fue tampoco*.

Moraleja: la *única* alternativa es que la culpable haya sido Bárbara. Eso hace que todos los datos se verifiquen. Y listo.

UN INTERMEDIO BREVE.
CUATRO DADOS Y LA PROBABILIDAD DE QUE SALGA (O NO) UN SEIS

Acá tiene cuatro dados. Póngalos en un cubilete. Agítelo. Haga rodar los dados. ¿Qué es más probable que suceda: que salga algún seis o que no salga ninguno?

No lea tan rápido la respuesta. ¿Qué gracia tendría?

Respuesta

No sé qué es lo que dice la intuición o, en todo caso, no sé lo que le sugiere *su* intuición, pero ¿qué piensa usted que es más probable?

Como cada dado es independiente (o sea, el resultado de uno no afecta el resultado de los otros tres), cada uno puede aparecer con cualquiera de sus caras hacia arriba.

Como son cuatro dados, *los posibles resultados son*

$$6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^4 = 1.296$$

Por otro lado, para que una 'tirada' no tenga *ningún seis*, los cuatro dados deben salir con alguno de los cinco primeros números hacia arriba (del 1 al 5).

Una vez más, como son cuatro dados, *todos* estos resultados son:

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 625$$

Por lo tanto, de las 1.296 posibilidades hay 625 (un poco menos de la mitad) que no contienen ningún seis.

Moraleja: si usted tira cuatro dados, es levemente más posible que salga un seis que ninguno. ¿No es notable esto?

Apéndice

No puedo resistir la tentación de preguntarle: si vuelve a tirar los cuatro dados, ¿qué es más probable que suceda? ¿Que aparezca un *cuatro* o que no? ¿Y que aparezca un *as*? ¿Qué se deduce de todo esto?

74. Si tiene interés en explorar este tema, le sugeriría que se proponga problemas usted, por su cuenta, y trate de resolverlos. En el camino va a descubrir cómo funciona su intuición (en este caso, al menos). Mientras tanto, yo agrego algo más para que piense: ¿Cuántas veces hay que arrojar N dados para que sea más probable obtener un 6 que ninguno?

Detectives por un rato

¿Quiere entretenerse un rato? Le propongo un problema sencillo que le servirá para elaborar una estrategia y determinar quién es quién. Me explico.

En una compañía hay tres personas que tienen cargos distinguidos: directora, contadora y jefa de ingenieros.

Los nombres de las tres son: Brenda, Julia y Silvia.

Le ofrezco acá algunos datos que son conocidos, y usted tiene que determinar qué cargo ocupa cada una.

1. La contadora es hija única y es la que gana menos de las tres.
2. Silvia, que está casada con el hermano de Brenda, gana más que la jefa de ingenieros.

¿Alcanza con esta información para saber quién es la directora, quién es la contadora y quién es la jefa de ingenieros?

Se lo dejo a usted.

Solución

Si usted lee directamente lo que voy a escribir a continuación, entonces el problema carece totalmente de sentido. Como ya pregunté cientos de veces: ¿qué gracia tendría "resolverlo" de esa forma? El ejemplo que se me ocurre es el de una persona que toma una revista o un diario y se propone resolver un crucigrama o las palabras cruzadas. Ahora imagine que, en las definiciones de las palabras que aparecen en las filas horizontales o verticales, el autor pone:

Horizontales: 1 = Perro; 7 = Cuadrado ; 10 = Alfonsín…
Verticales: 1 = Paraná ; 4 = Cómico…

Es decir, en lugar de poner *"animal de cuatro patas que ladra"* o *"figura geométrica de cuatro lados"* o *"Presidente argentino durante*

1983-1989” para las horizontales, y *“uno de los dos ríos que determinan la Mesopotamia argentina”* o *“que promueve a la risa”* para las verticales… ¿quién tendría ganas de hacer ese crucigrama? O sea, uno va y ‘copia’ dentro de la grilla las palabras que encontró en las definiciones ¡y listo!

Yo sé que le parece ridículo mi ejemplo (porque lo *es*), pero yo siento que si una persona se propone pensar algo y empieza por leer la solución, ¡hay algo que funciona mal! (¿o soy yo?).

Dicho esto, le propongo ahora que se fije en siguiente ‘grilla’ (por ahora vacía):

Contadora			
Directora ingenieros			
Brenda			
Julia			
Silvia			

Ahora bien, si pudiera deducir que Brenda es la contadora, entonces pondría una letra ‘o’ en la primera fila, *justo* en la columna en la que figura ‘contadora’. Si pudiera inferir que Silvia *no es la directora*, colocaría una letra ‘x’ en la tercera fila y en la primera columna, debajo de donde dice ‘directora’. Es decir, la grilla quedaría así:

Contadora			
Directora ingenieros			
Brenda	o		
Julia			
Silvia	x		

Esta es la convención que voy a usar. Siéntase libre usted de utilizar el método que quiera, y por supuesto *descarte lo que yo le propongo* si tiene una mejor forma de abordar el problema. Yo sigo acá.

Ahora miremos las frases (1) y (2). Como Silvia está *casada* con el hermano de Brenda, queda claro que Brenda no puede ser la hija única de la que habla la frase (1). Como no es la hija única, Brenda no puede ser la que gane menos y, por lo tanto, no es la contadora.

Por otro lado, como la frase (2) dice que Silvia gana *más* que la jefa de ingenieros, entonces *tampoco puede ser la contadora*. ¿Por qué? Por la frase (1), la contadora es la que gana menos. En consecuencia, la única que *puede ser la contadora es Julia*, por eso pongo ‘o’ en la segunda fila y tercera columna. A esta altura, el diagrama queda así:

	Contadora	Directora	Jefa de ingenieros
Brenda			
Julia			
Silvia			

Como Silvia gana *más* que la jefa de ingenieros, entonces esto 'casi' termina por resolver el problema. Ya sabemos que Silvia *no puede ser la contadora*, entonces Silvia resulta ser la 'directora'. La grilla resulta ser:

	Contadora	Directora	Jefa de ingenieros
Brenda			
Julia			
Silvia			

De este último diagrama se deduce el final: Brenda *tiene que ser* la jefa de ingenieros.

¿Le resulto fácil? Sí, así parece, pero ¿sabe por qué? Porque su capacidad deductiva le permitió eliminar todos los casos imposibles y, tal como decía Sherlock Holmes, cuando uno está en la búsqueda del culpable, basta con eliminar todo lo que sea imposible. El resultado *tiene* que ser lo que uno estaba buscando.

Para finalizar, ¿me puedo permitir una propuesta? Ahora que ya entendió (o entendimos) cómo se pudo resolver el problema, ¿no tendría ganas de formular uno usted? Sí, usted. ¿Por qué no aprovecha lo que aprendió al resolver este planteo y lo usa para generar algo equivalente que usted pueda testear con otras personas? Eso no solo les va a servir de entretenimiento a otros (y a usted misma/o), sino que le permitirá disfrutar de algo que —quizás— no sabía que poseía: la habilidad para plantear situaciones irresueltas cuya solución se puede *inferir o deducir*. ¿Qué le parece?

Deducción (algunos datos más)

Este tipo de problemas (como el que planteé en “Detectives por un rato”) fueron presentados por primera vez como un género separado por Henry Dudeney, escritor y matemático británico que vivió entre 1857 y 1930. Hoy son muy frecuentes, pero en su momento él se ocupó de exhibir la potencia que podría tener el uso de la lógica aristotélica en la vida cotidiana. Después apareció otro escritor británico, Hubert Phillips que escribió algo así como *setenta libros* que, si bien no fueron *todos* de ese género, aportaron a la ‘causa’. Phillips se hizo famoso con el tiempo, porque publicaba con dos seudónimos diferentes en dos revistas distintas. En *New Statement* firmaba como “Caliban”. En *News Chronicle* usaba el nombre “Dogberry”.

De todas formas, lo que hizo *explotar* la popularidad de este tipo de relatos deductivos (y detectivescos) fue su aparición por primera vez en uno de los *clásicos de la literatura mundial*. Fue Edgar Allan Poe, en abril de 1841, quien publicó en la revista *Graham’s Magazine* la primera versión de “Los crímenes de la calle Morgue”. Poe introdujo al entrañable y joven detective Auguste Dupin, quien se dedicaba a usar argumentos deductivos —que Poe compartía con los lectores— para descubrir a los responsables del robo o del crimen.

Con la misma idea, y siguiendo el éxito que había tenido Poe, irrumpió en la escena Sherlock Holmes, el detective más famoso de la historia, obra de la pluma (¡qué viejo estoy! *La pluma*… ¿se usa todavía esta expresión?) de Sir Arthur Conan Doyle (1859-1930). Y no puedo terminar este brevísimo *racconto* sin incluir (usted pensó que me había olvidado, ¿no?) a Agatha Christie (1891-1976). Ella fue quien pensó y describió al inefable Hércules Poirot.

Hubo muchos más, claro está, pero creo que estos tres fueron los más representativos. No solo crearon un género literario, sino que usaron la lógica matemática como una herramienta contundente. Fueron explicando exhaustivamente las deducciones que hacían para llegar a cada una de sus conclusiones. En algún sentido, y al menos por un rato, usted y yo fuimos *detectives* junto con ellos.

Más allá de la belleza estética del relato (ciertamente *no menor*) y de la originalidad en los planteos, el metamensaje que dejaron con sus

escritos fue que si uno es capaz de analizar los datos, separar las incongruencias, las contradicciones, las imposibilidades… si uno se toma el trabajo de hacer una limpieza casi 'quirúrgica' de lo que sobra o 'hace ruido', esto debe ser suficiente para determinar quién ha sido el autor del robo o del crimen.

Nora y el problema de los caramelos

Supongamos que la madre de Nora le regaló una caja de caramelos. Como no sabemos exactamente cuántos caramelos hay en la caja, voy a llamar *n* a esa cantidad. Lo que *sí* sabemos es que en la caja hay *exactamente* 10 caramelos de dulce de leche.

Nora hace lo siguiente: mete la mano en la caja y saca un caramelo cualquiera al azar y lo come. Cuando termina, mete la mano en la caja otra vez, vuelve a sacar otro caramelo, también al azar, y lo come.

La probabilidad de que los *dos* caramelos que Nora comió sean *ambos* de dulce de leche es 3/8.

Lo que el problema pide es lo siguiente: muestre que el número *n* —el total de caramelos que hay en la caja— tiene que satisfacer la siguiente igualdad:

$$n^2 - n - 240 = 0 \ (*)$$

"¿Qué dijo?". Sí, eso es lo que digo (o escribo). El número *n* que cuenta la cantidad total de caramelos que hay en la caja tiene que cumplir con la igualdad que figura en (*).

¿Por qué? Bueno, esa es la parte que le *toca* pensar a usted. Yo sigo acá.

Respuesta

Fíjese que como sabemos que entre los *n* caramelos que hay en la caja solamente 10 son de dulce de leche, la probabilidad de que Nora saque *un* caramelo de esas características se calcula haciendo el cociente entre el número 10 y el número total de caramelos que hay en la caja, o sea: 10/n.

Una vez que Nora se comió el primer caramelo, en la caja quedan (n – 1), y de ellos solamente *nueve* son de dulce de leche. Por lo tanto, cuando Nora elige el segundo caramelo, la probabilidad de que sea de dulce de leche se calcula ahora haciendo el cociente (9/(n – 1)).

En consecuencia, la probabilidad de que hayan sucedido los *dos* acontecimientos seguidos (dos caramelos de dulce de leche consecutivos), como son dos sucesos independientes, se calcula

multiplicando ambas probabilidades. La primera es (10/n) y la segunda, (9/(n – 1)).

Es decir,

$$(10/n) \times (9/(n-1) = 3/8$$

Escribo que ese número es 3/8 porque es lo que estipulaba el enunciado del problema.

Ahora, es solo cuestión de multiplicar los numeradores y denominadores de cada una de las fracciones que aparecen en el miembro de la izquierda:

$$90/(n(n-1)) = 90/(n^2 - n) = 3/8$$
$$240 = (n^2 - n)$$

y de acá se deduce lo que queríamos:

$$n^2 - n - 240 = 0$$

Apéndice

En el colegio secundario, nos 'taladraron' con la fórmula que permite calcular las *raíces de un polinomio cuadrático*, ¿se acuerda?

$$n = (-b + \sqrt{b^2 - 4ac})/2a \quad n = (-b - \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$$

En este caso, entonces, a = 1, b = −1 y c = −240.

Aplicando la *fórmula* anterior, las 'raíces' son (y le pido que *haga las cuentas para verificar que no me equivoco con lo que escribo*):

$$n = ½ (1 + \sqrt{(1^2 - 4(-240))} = ½ (1 + \sqrt{(1 + 960)}) =$$
$$½ (1 + \sqrt{961}) = ½ (1 + 31) = \mathbf{16}$$
$$n = ½ (1 - \sqrt{(1^2 - 4(-240))} = ½ (1 - \sqrt{(1 + 960)}) =$$
$$½ (1 - \sqrt{961}) = ½ (1 - 31) = \mathbf{-15}$$

Hay dos soluciones: (+16) y (−15). Obviamente, como no puede haber un número negativo de caramelos, la única posibilidad es que en la caja haya habido 16.

Calculemos juntos cuál sería la probabilidad de que Nora meta la mano en la caja dos veces seguidas y saque dos caramelos de dulce de leche. Para la primera vez, la probabilidad es de (10/16) = (5/8). Para que el segundo sea *también* de dulce de leche, la probabilidad es de (9/15) = 3/5.

En definitiva, la probabilidad de que los dos sean de dulce de leche es:

$$((5/8) \times (3/5)) = 3/8$$

que es lo que decía el problema. Listo.

Problema breve y ¿fácil?

Uno de los diarios más prestigiosos de Europa es *The Guardian*, que se edita y publica en Gran Bretaña. Como sucede con casi todos los *grandes* matutinos del mundo, *The Guardian* tiene un columnista que refleja lo que sucede en el mundo de la matemática, pero muy especialmente lo que se llama 'matemática recreativa'. En este caso me refiero a Alex Bellos.

Bellos nació en Oxford, tiene 47 años, y lo curioso es que fue corresponsal especial del diario durante cinco años en Brasil, más precisamente en Río de Janeiro. Enamorado del fútbol, escribió un par de libros que tuvieron marcado éxito en el Reino Unido: el primero fue una biografía de Pelé (como coautor) y el otro se 'autoexplica' con el título: *Futebol: The Brazilian Way of Life*[75].

Por supuesto, la mención a su pasión por el fútbol en general y por Brasil en particular no es la razón por la que quiero citarlo. Bellos escribe cada dos semanas un problema sobre matemática recreativa que es seguido por millones de lectores; además trabaja en la BBC y da charlas y conferencias en toda Europa. Y aquí es donde me quiero detener y contar una historia que me dejó intrigado y que quisiera compartir con usted.

Hace muy poco tiempo, presentó un problema en el diario y les anticipó a sus (potenciales) lectores lo mismo que voy a hacer yo acá: Bellos dijo que *tenía datos* de otros lugares en los que el problema fue planteado y que el 80% de las personas lo contestaban equivocadamente, a pesar de ser un problema muy sencillo. Dijo que él no lo podía creer (y yo tampoco). Luego de la publicación sucedió lo que él había previsto.

Confundido por los datos y antes de escribir de qué se trata, le planteé el problema a muchísima gente, entre amigos, familiares, alumnos, colegas… y me sorprendí con los resultados una vez más.

Al llegar a ese punto, se me ocurrió una idea. Pensé: le voy a pedir ayuda a Manu Ginóbili, que tiene más de ¡3.800.000! (tres millones ochocientos mil) seguidores en todo el mundo en su cuenta de Twitter. Si se lo planteaba a tanta gente podríamos tener una idea más precisa de lo que sugería Bellos… en tiempo real.

Manu aceptó inmediatamente. Con todo, me hizo notar un inconveniente extra: había que condensar el planteo en 140 caracteres.

Estuve a punto de decir que no: como no tengo cuenta de Twitter, no estoy acostumbrado a comunicarme con tan pocos caracteres[76], pero él, que obviamente tiene mucha experiencia, sí pudo.

No solo eso: como usted verá, se trata de un problema que ofrece tres potenciales respuestas de las cuales una es la correcta (lo que se conoce con el nombre de '*multiple choice*'). Aun con todos esos inconvenientes, ¡lo planteó!

En dos minutos ya habían contestado 123 personas. Curiosamente (o no), casi el 62% estaba equivocado. Le pregunté si era habitual que hubiera ese número de reacciones tan rápidas, pero Manu me dijo que era la primera vez que planteaba un problema de estas características: "No sé qué esperar, no sé qué es lo que van a contestar".

Con todo, me advirtió que había que ponerle un *límite* temporal a la pregunta: el problema permanecería 'abierto' durante seis horas, y me dijo que no esperara que se mantuviera ese ritmo porque eso *nunca* pasa.

Y así fue. No siguió con ese nivel de participación, pero nos ofreció los datos de 15.003 (quince mil tres) personas. Tampoco se sostuvo el porcentaje de error. Ahora, el 47% lo había contestado correctamente.

A esta altura, creo que llegó el momento de que lo plantee, ¿no le parece? Voy a proponer una versión 'un poco más larga', porque yo no tengo esa restricción en los caracteres. Pero si usted tiene curiosidad por saber lo que escribió Manu, alcanzará que busque en su cuenta de Twitter, y allí podrá verificar los datos que aparecen acá[77].

El problema es este:

En una reunión, hay tres personas que se separaron del resto. No se conocen entre sí pero en una foto se advierte lo siguiente: Ulises está mirando a Sabina. A su vez, Sabina está mirando a Máximo. Se sabe que Ulises está casado pero Máximo es soltero. ¿Es cierto que en ese grupo de tres hay alguna persona casada que está mirando a una soltera?

Las tres posibles respuestas son:

1. Sí. Es cierto.
2. No. Es falso.

3. Esos datos son insuficientes para poder decir si es cierto o falso.

Usted, sí, usted… ¿cuál de las tres respuestas daría?

Respuesta

Por supuesto, la *única* gracia reside en que lo haya pensado por su cuenta. ¿De qué le serviría leer lo que yo escriba acá? En todo caso, no hay nadie que pueda leer lo que usted piensa. De manera tal que tómelo como un genuino entretenimiento. Por otro lado, ¿qué importa? ¿Qué pasaría si contestara mal? ¿Será acaso una peor persona? ¿O será una persona 'tonta'? En fin, me siento un tonto yo por tener que seguir escribiendo este tipo de observaciones cada vez que presento un problema. Pensémoslo juntos.

Los datos dicen que Ulises es casado y que Máximo es soltero. El problema *no dice* en qué situación está Sabina, pero no hay muchas alternativas: o es casada o es soltera, una de dos. Es lo que llamamos una situación *binaria*.

Supongamos que Sabina está casada, no importa con quién. Si así fuere, como ella está mirando a Máximo, que se sabe que es soltero, ella sería la persona casada que está 'mirando' a un soltero.

Por otro lado, si Sabina fuera soltera, que es la otra posibilidad, en *este* caso Ulises (que está casado) estaría mirando a una persona soltera (Sabina).

Conclusión: *Sí*, en la situación planteada en el problema sucede que *siempre* hay alguien casado mirando a una persona soltera. Y listo.

Debo confesar que me pareció un problema verdaderamente sencillo de pensar, pero nadie dice que yo tenga razón. De hecho, no es eso lo que se desprende de los resultados.

De la encuesta de Manu, el 47% de los que participaron dijeron que sí, que se podía saber. El 53% restante opinó que no se podía saber (un 36%), o bien que no había ninguna persona casada mirando a una persona soltera (17%).

No querría ser yo quien tenga que sacar conclusiones sobre lo que sucede porque no me siento educado para opinar. ¿Será que el problema es que uno *no quiere pensar*? ¿Tendrá acaso algún *truco* que termina desconcertando a la persona a quien uno se lo plantea?

De acuerdo con lo que yo viví personalmente, hubo algunos que contestaron 'al toque', pero bien. La mayoría lo contestó rápido también, pero mal… sin siquiera darse la oportunidad de revisar lo que estaban diciendo.

¿Servirá este ejemplo (tan trivial) para revelar algo de lo que no

nos damos cuenta? ¿Nos cuesta acaso *tolerar tener en la cabeza un problema sin resolver*? ¿Es pereza? ¿O será que nadie quiere perder tiempo pensando *pavadas*?

En definitiva, lo que yo piense resulta irrelevante. ¿Usted qué experiencia tuvo? ¿Le sirvió para algo? ¿Se lo propuso a otras personas cercanas? ¿Y qué les pasó a ellos? ¿Qué aprendemos con estos datos? A mí me sirvió… ¿a usted?[78]

75. *Fútbol: la forma de vida brasileña* (la traducción es mía, porque no encontré el libro en español).

76. Ernesto Tiffenberg puede dar cuenta de esto.

77. Manu escribió: *"Problema: Ale mira a Eva, Eva mira a Omar. Ale casado, Omar soltero. ¿Puedo saber si un casadx mira a un solterx?"*.

78. La persona que le presentó el problema a Alex Bellos (y a quien él le da el crédito en el artículo de *The Guardian*) se llama James Grime. A su vez, el propio Grime le da el crédito a Keith Stanovich en un artículo de la revista *Scientific American*. Por su parte, Stanovich dice que él lo vio en un trabajo de Hector Levesque, computador científico de la Universidad de Toronto. Ahí paré. Por otro lado, los resultados en Gran Bretaña fueron los siguientes: 1) respuesta correcta: 27,68%; 2) suma de las dos respuestas *incorrectas*: 72,32%. Puede consultar: scientificamerican.com/article/rational-and-irrational-thought-the-thinking-that-iq-tests-miss

¿Probabilidades? ¿De qué habla?

Quiero comentar algo que —creo— es muy interesante y que sugirió hace muchos años el matemático austrohúngaro Bruno de Finetti. Bruno nació en Innsbruck en 1906, en lo que era Austria-Hungría y falleció en Roma, Italia. Quedó registrado en la historia como italiano, aunque supongo que esos datos son irrelevantes ahora. De Finetti fue justamente muy famoso en Italia, pero como sus trabajos se publicaron en principio en italiano y en francés, no tuvieron la trascendencia internacional que merecían hasta que fueron traducidos al inglés. Acá, una pausa.

Nos guste o no, así es el mundo científico en general y el de la matemática en particular. Si el material no aparece en inglés, es como si no existiera (o su rango de alcance se reduce muchísimo). Sé que es una afirmación algo *temeraria*, y mientras la escribo me quedo pensando si lo que estoy diciendo es tan así. En principio, no tengo dudas de que esto sucede en el mundo 'occidental'. Los trabajos más importantes en las revistas científicas internacionales de mayor prestigio están escritos directamente en inglés, independientemente del país de origen del autor, o en su defecto, traducidos al inglés.

Y si su sospecha la/lo lleva a pensar qué es lo que sucede en el mundo 'oriental', puedo asegurarle que eso sucede en ese *costado* también: los matemáticos chinos, japoneses, indios, coreanos… todos publican en inglés. Y cuando escribo *todos*, me refiero a *¡todos!*

Si bien es una digresión, quiero hacer una referencia que tipifica muy bien lo que sucede en un mundo que no tiene —en principio— nada que ver con el de la ciencia. La empresa United Airlines es la primera (o la segunda) más importante del mundo. Todo piloto o comandante de alguno de los aviones más utilizados (Boeing, Airbus, McDonnell-Douglas) necesita revalidar periódicamente su 'carnet' (una especie de 'registro de conductor de aviones') que lo autoriza a volar. Justamente United tiene en Denver, estado de Colorado, uno de los centros más importantes del planeta. Entrar en uno de esos simuladores de vuelo es el equivalente a entrar en la cabina de cualquiera de esos aviones. Más aún: el 'precio' de cada uno de esos simuladores es equivalente al del propio avión. Un inspector o

examinador les va proponiendo problemas a los pilotos como si estuvieran conduciendo el verdadero avión. Cada aspirante a renovar su carnet necesita pasar *todas* las pruebas. No se trata de superar la mayoría o 'casi' todas. No, tiene que pasarlas *todas*. Si no, si falla en alguna, debe volver después un cierto tiempo y enfrentar el examen nuevamente. Mientras tanto, *no puede volar*. Estuve de visita allí y también en el que tiene Aerolíneas Argentinas en Ezeiza. En ambos lugares fuimos con cámaras que nos permitieron registrar lo que sucedía y exhibirlo en la Televisión Pública Argentina.

Hace más de diez años, en febrero de 2006, me encontré en la cafetería con algunos pilotos argentinos que, como la mayoría de los sudamericanos, viajaban a Denver para renovar sus 'registros'. Justamente, conversando con ellos me enteré de lo que quiero comentar ahora y que tiene que ver con la trascendencia que no tuvo De Finetti mientras sus trabajos no eran publicados en inglés.

Acompáñeme con este ejemplo: imagine que usted es un piloto francés que está comandando un avión de Air France que viene de hacer un vuelo desde Buenos Aires y está a punto de aterrizar en alguno de los aeropuertos internacionales de París: Orly o Charles de Gaulle. Supongamos que, cuando falta una hora para el aterrizaje, usted comienza su contacto con la torre de control del aeropuerto. ¿En qué idioma cree que se comunican entre ellos?

Si puede, no conteste tan rápido, dese la oportunidad de pensar. Le anticipo que mi respuesta fue equivocada.

No sé cuál es la suya, pero yo contesté: "En francés".

"¡No!", me respondieron todos al unísono. "Se comunican en inglés". Ahora, una reflexión: si uno lo piensa bien, la respuesta tiene sentido. El avión de Air France no está solo en el aire, no es el único que está por hacer su aproximación final para el aterrizaje. Hay muchísimos otros aviones alrededor que no solo están en la misma 'zona', sino que también están a punto de partir desde ese mismo aeropuerto. Y todos ellos están de alguna forma 'ligados': lo que sucede con un avión tiene incidencia con el resto. Y viceversa. Por lo tanto, hay/hubo que elegir un idioma 'universal' que les permita a todos entender lo que está sucediendo alrededor, algo así como *uniformizar* el espectro de posibilidades. Ese idioma, hasta acá, es el inglés.

Ahora sí, después de esta digresión vuelvo a De Finetti. Sus trabajos más importantes fueron en Teoría de Probabilidades, a tal punto que sus libros más reconocidos llevan ese nombre. De Finetti era conocido como un gran 'provocador', dicho esto en el buen sentido: no trataba de *provocar* por ser pendenciero, lo hacía desde el

punto de vista científico. En un momento, hizo una afirmación que terminó siendo 'hipercontroversial', polémica.

Él sabía que generaría una gran polvareda, pero la hizo igual, como quien entra en un lugar zapateando en el piso. Escribió: "Las probabilidades no existen". Sí, así como suena. Ahora bien: ¿qué sentido tendría que alguien —respetado y reconocido— dijera algo así? ¿A qué se estaría refiriendo?

Pensémoslo de este modo: suponga que usted está a punto de tirar una moneda al aire. Sabe (hasta donde uno *puede* saber) que la moneda no está *cargada*. Asume entonces que tiene tantas posibilidades de salir *cara* como de salir *ceca*. Si esto *fuera* así, en el momento que la arroja sabe que la probabilidad es ½ (50% de chances) de que salga de cualquiera de los dos lados. Y es la misma para cada 'cara' de la moneda.

Ahora bien, imagine que yo tuviera en cuenta estos datos:

a. la posición inicial de la moneda (antes de arrojarla al aire);
b. la fuerza con la que usted la va a hacer girar al tirarla hacia arriba, el peso de la moneda, el rozamiento que va a tener en el camino, las condiciones externas de presión y temperatura, la altura que va a alcanzar y el tiempo que le va a llevar descender hasta la mesa o superficie plana donde va a terminar su camino.

Usted advertirá que yo podría llegar a *predecir* de qué lado va a 'aterrizar' la moneda y, por lo tanto, anticipar si va a salir cara o ceca. ¿De qué probabilidad me está hablando, entonces?

Lo mismo con un dado. Si uno tuviera los datos iniciales, metiera el dado en un cubilete y fuera capaz de contabilizar la cantidad de veces que el dado impacta contra la cara interna del cubilete, de describir la trayectoria del dado cuando lo agita en una forma predeterminada, y de medir la fuerza, la altura y la velocidad con la que uno va a dejar caer el dado hasta que comience a rodar sobre una mesa… Es decir: si uno pudiera 'medir' todo lo necesario, ¿no cree que podría *predecir* qué cara del dado va a quedar mirando hacia arriba y, por lo tanto, decidir qué número saldrá?

La pregunta sería: "¿Por qué hablar de que la *probabilidad* de que aparezca un determinado número es de 1/6 —hay seis caras posibles pero solamente *una* es la favorable— cuando uno podría en realidad *predecir el resultado*?".

Por si hace falta, un ejemplo más: si se está por producir un sorteo de la lotería, en lugar de hablar de probabilidades, todo lo que uno tendría que hacer es un estudio muy fino de la evolución de cada una

de las *pelotitas* que están dentro de las esferas transparentes que las contienen, la rotación que se produciría allí adentro, el impacto de las pelotitas entre sí, las trayectorias de todas ellas, las fuerzas a las que están sometidas, y así siguiendo, hasta poder determinar cuál será la que saldrá por la puerta prevista… Si uno pudiera *medir* todas estas variables, no debería haber problema en predecir el resultado. Todo terminaría siendo una consecuencia natural. En todo caso, no habría *nada* librado '*al azar*'.

Ahora me gustaría proponerle una pregunta final (al menos por ahora): "¿No será, entonces, que hablamos de probabilidades porque nos sirve como *excusa* para encubrir nuestra ignorancia para *medir*?".

Tomemos el caso de la moneda, aunque en realidad se puede extrapolar a todos los otros. De acuerdo con los datos que *nosotros* tenemos, con lo que *nosotros sabemos* sobre 'arrojar monedas', la probabilidad de que salga *cara* o *ceca* es de un medio. Hasta allí nos da nuestro conocimiento. Lo mismo con el dado. Con lo que *nosotros* sabemos, si alguien nos preguntara qué cara del dado va a salir, *todo* lo que podríamos decir es que la *probabilidad* de que salga cualquiera de los números es 1/6… y nada más. Pero eso sucede por nuestra propia incapacidad, y *no* porque no se pueda saber nada más.

Desde este punto de vista, *la probabilidad no existe: nuestra ignorancia sí.*

¿Cómo empezó todo?

Siempre es intrigante saber *cómo empezó todo*. Por ejemplo, ¿cuándo habrá sido la primera vez que se habló de *probabilidades*? ¿Qué lo habrá motivado? ¿Y a quiénes? ¿Por qué? ¿Dónde estaban? Si yo le pidiera que se detuviera acá un instante y pensara a quiénes cree usted que podría haberles interesado evaluar 'la probabilidad' de que un cierto evento suceda, ¿qué diría?

Hay muchas versiones sobre los inicios. En general, los que estudian la 'historia de la ciencia' coinciden en ubicar ese momento en el siglo XVII, allá por el año 1654. No sé si lo que voy a transcribir pasó *exactamente* así; en todo caso, *conceptualmente tiene sentido* que haya ocurrido alrededor del 'juego'. Sí, del juego. Es bastante razonable imaginar que gente interesada en apostar dinero a algún suceso o evento estuviera motivada a evaluar 'cuántas posibilidades habría' de que eso pasara. Algún juego de cartas, dados, en un casino o incluso en una carrera de caballos, alguna riña de gallos, no sé… se me ocurre que tendría que haber sido en algún lugar en donde hubiera 'algo' en juego. Y no descartaría que hubieran sido campesinos los que trataron de evaluar cuán probable era que fuera a llover, teniendo en cuenta las condiciones de contorno.

Vuelvo a 1654. Antoine Gombaud (1607-1684) era un escritor francés nacido en Poitou[79] que quería que lo llamaran "Chevalier de Méré". Más allá de buscar razones que lo llevaran a querer ser distinguido como 'caballero', lo que me interesa comentar de su vida es *una* de las preguntas que le hizo a uno de los más reconocidos matemáticos de la época, Blaise Pascal. Gombaud tenía una duda: "¿Qué es más probable que suceda: que al tirar un dado cuatro veces seguidas salga al menos *un seis*, o que aparezca un *doble seis* al tirar dos dados 24 veces?".

Le sugiero que lea la pregunta nuevamente para tratar de evaluar lo que *piensa usted*. ¿Cuál de los dos eventos es más probable que suceda? ¿O da igual?

Aparentemente, a Gombaud le gustaba el juego y, por ende, intentaba encontrar variantes a los juegos convencionales para así buscar alguna ventaja en las apuestas. En principio, a él le parecía que

las probabilidades de los dos eventos tendrían que ser iguales, y sus argumentos para sostenerlo eran estos:

- ¿Cuál es la chance de que aparezca *un* seis al tirar un dado? 1/6.
- ¿Por qué? La probabilidad de que un *evento* suceda de acuerdo con nuestra expectativa se calcula haciendo el cociente (la división) entre los casos favorables y los casos posibles. En esta situación, los casos posibles son seis, ya que al tirar un dado es posible que salga en seis posiciones diferentes: 1, 2, 3, 4, 5 y 6.
- ¿Cuáles son los casos *favorables?* En este caso, como queremos estimar cuán posible es que al tirar el dado salga el número *seis* (y ningún otro), el *único* caso favorable es el *seis.* Moraleja: hay *un solo caso favorable.*
- Entonces, la probabilidad de que salga *un* seis se calcula como: (casos favorables)/(casos posibles) = 1/6.

Con estos datos, el caballero hizo los siguientes razonamientos (y usted siéntase libre de *discutirle* las ideas).

En el primer caso, quiero calcular la probabilidad de que salga *un seis* al tirar *cuatro veces* el dado. Por lo tanto, como la probabilidad en cada tiro es de 1/6, al tirarlo cuatro veces *multiplico por cuatro*. Resultado:

$$4 \times (1/6) = 4/6 = 2/3$$

Perfecto, concluyó 'el caballero'. Ya tengo calculada la primera probabilidad. Ahora, voy a evaluar la *segunda*. Quiero saber la probabilidad de que aparezca al menos *un doble seis* al tirar 24 veces los dos dados al mismo tiempo.

Fíjese que ahora los casos posibles son 36. ¿Por qué? Es que los dados pueden salir así:

(1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6)
(2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6)
(3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) (3,6)
(4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5) (4,6)
(5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) (5,6)
(6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) ***(6,6)***

En cada *par*, el primer número indica el resultado del primer dado, y el segundo número, lo que salió en el segundo dado. Luego, como se

ve, hay 36 resultados posibles.

De todos ellos, hay solamente *uno* que es favorable: el último, (6,6).

En consecuencia, la *probabilidad* de que al tirar dos dados *salga un doble seis* es 1/36.

Pero acá no termina todo. Es que yo voy a tirar esta pareja de dados 24 veces. Entonces, multiplico esta probabilidad (1/36) por 24 y se obtiene (curiosamente) este resultado:

$$24 \times (1/36) = 2/3 \ (**)$$

Si usted compara (*) con (**), descubrirá que *¡ambas probabilidades son las mismas!* Sin embargo, Gombaud no lograba que sus cálculos se correspondieran con la realidad: "Algo anda mal con estas cuentas, porque haciendo un resumen de las veces que yo aposté, en el 'largo aliento', debería haber ganado tanto como perdido. Sin embargo, pierdo muchas más veces con la segunda posición. ¿Qué pasa? ¿Qué es lo que anda mal?".

Esa fue la pregunta que le hizo a Pascal. A partir de allí, comenzó un intercambio epistolar entre Pascal y Pierre de Fermat (abogado de renombre y aficionado a la matemática, quien terminó transformándose en uno de los matemáticos más importantes de la historia). Al tratar de contestar *esa* pregunta en particular —pero no la única—, entre los dos comenzaron a dar forma a lo que hoy se conoce con el nombre de Teoría de Probabilidades.

Me interesaría proponerle que me acompañe en un resumen de la respuesta que encontraron ambos y que les permitió convencer a Gombaud de que *su* cálculo estaba mal: ¡los eventos no son igualmente probables! Veamos por qué. No me abandone ahora porque falta *lo mejor*.

Necesito invitarla/lo a pensar conmigo algo que usted hace todo el tiempo y posiblemente nunca detectó. Por ejemplo, si yo le preguntara: "Si tiro una moneda al aire, ¿qué porcentaje de posibilidades hay de que salga *cara*?", estoy seguro de que usted diría sin dudar: "¡Un 50%!". Perfecto. Pero si yo formulara la pregunta de otra manera: "¿Qué porcentaje de posibilidades hay de *que no salga cara*?". ¿Qué contestaría? Tómese un instante. La respuesta es muy fácil, también: otra vez, 50%. ¿Puedo preguntarle cómo lo dedujo? Es que uno, *inadvertidamente, resta, del 100% de posibilidades, el 50% que corresponde a que salga cara*. Entonces, para contestar la pregunta sobre qué porcentaje hay de que *no salga cara*, uno deduce inmediatamente que la respuesta es la diferencia (100 – 50) = 50. En

términos de *probabilidad* (que son todos números entre 0 y 1), la probabilidad de que salga cara es ½ y, por lo tanto, la probabilidad de que *no salga cara* es (1 – ½) = ½.

Un ejemplo más. Como escribí antes, si uno tira un dado, la *probabilidad de que salga un seis* es 1/6. Luego, la probabilidad de que *no salga un seis* se puede calcular *restando* (1 –1/6) = 5/6.

Con esta idea, se puede deducir lo siguiente: si la probabilidad de que suceda un evento cualquiera es *p*, entonces la probabilidad de que *no suceda 'ese evento' es (1 – p)*.

Listo. Es todo lo que necesito. Ahora voy a calcular junto con usted las probabilidades que lo atormentaban a Gombaud.

Primero, calculemos la probabilidad de que salga *al menos un seis* al tirar cuatro dados.

Antes vimos que la probabilidad de que *no salga un seis* es (1 – 1/6) = 5/6. Por lo tanto, la probabilidad de que *no salga un seis al tirar un dado cuatro veces se calcula multiplicando 5/6 por sí mismo cuatro veces*:

$$(5/6) \times (5/6) \times (5/6) \times (5/6) = (5/6)^4 = 0{,}4822253086\ldots$$

Le recuerdo que ahora, para calcular que ***sí salga*** *al menos un seis al tirar cuatro dados*, tenemos que *restar* (1 – 0,4822253086) = 0,517746914.

Es decir, en términos de porcentajes, la probabilidad de que al tirar un dado cuatro veces aparezca por lo menos un seis es 'casi' del 51,8%.

Recordemos este dato, ya que voy a volver sobre él. ¿Cómo seguimos?

Ahora queremos calcular la probabilidad de que, al tirar una *pareja* de dados 24 veces, aparezca por lo menos un *doble seis*. Como antes, vamos a calcular primero la probabilidad de que *no salga nunca una pareja de doble seis al tirar 24 veces los dos dados*. ¿Cómo hacer?

Primero, al tirar un par de dados, la probabilidad de que en esa sola tirada de los dos dados *no salga un doble seis* se calcula como (35/36). ¿Por qué? Como hice antes, la probabilidad de que *sí* salga un doble seis es (1/36). Luego, la probabilidad de que esto *no* suceda es (1 – 1/36) = 35/36.

Ahora bien. Necesito calcular la probabilidad de que esto suceda 24 veces (que no salga nunca un doble seis). Luego, lo que tengo que hacer es multiplicar este número 24 veces por sí mismo:

$$(35/36) \times (35/36) \times \ldots. \times (35/36) \times (35/36) = (35/36)^{24}$$

Este número es:

$$(35/36)^{24} = 0{,}508596124\ldots$$

Pero acá no termina todo. Como yo quiero calcular la probabilidad de que *salga al menos un doble seis*, lo que tenemos que hacer es —una vez más— *restar*:

$$(1 - 0{,}508596124) = 0{,}491403876$$

En términos de porcentaje, descubrimos que la probabilidad de que salga *al menos un doble seis* al tirar dos dados 24 veces es un poco menos de 50%.

Conclusión: ¡Gombaud tenía razón! Hacía mal las cuentas y por eso se equivocaba, pero la *realidad* le había hecho sospechar que las probabilidades no eran las mismas.

Quiero agregar aquí una curiosidad: si en lugar de 24 veces tirara esa pareja de dados una vez más, o sea, 25 veces, fíjese lo que pasa con la probabilidad:

$$(35/36)^{25} = 0{,}494468454$$

Luego, debo restar:

$$(1 - 0{,}494468454) = 0{,}505531546$$

Esto nos dice que si Gombaud hubiera tirado esa pareja de dados *una sola vez más*, entonces *sí* la probabilidad (0,508596) de que *al menos salga un doble seis al tirar dos dados* habría sido más cercana a la probabilidad de que saliera *por lo menos un seis al tirar un solo dado cuatro veces* (0,517746914). Era cuestión de tirar ese par de dados 25 veces, y no 24. Y si prefiere una aproximación *aun mayor*, fíjese lo que sucede si, en lugar de 24 o 25, tira el par de dados 26 veces:

$$(35/36)^{26} = 0{,}48073322$$

Luego, al restar:

$$(1 - 0{,}48073322) = 0{,}51926678$$

Esta es la historia que tuvo a Pascal y Fermat entretenidos durante

un largo rato y sirvió para empezar a *conceptualizar* lo que termina siendo hoy la Teoría de Probabilidades, una de las herramientas más poderosas con las que contamos los humanos.

En la medida en que —al menos todavía— no podemos predecir el futuro, lo que *sí* podemos hacer es estimar cuán probable es que un evento suceda… o no. No es poco[80].

79. Extraigo la referencia de Wikipedia: es.wikipedia.org/wiki/Antoine_Gombaud (la versión en francés la encuentra en fr.wikipedia.org/wiki/Antoine_Gombaud,_chevalier_de_Méré).

80. Gombaud debió sospechar que sus cuentas iniciales estaban mal porque —por ejemplo— si en lugar de tirar el dado cuatro veces lo hubiera tirado seis, con su método para calcular esa probabilidad el resultado habría sido $(6 \times (1/6)) = 1$. Cuando un evento tiene probabilidad 1, es *seguro* que va a suceder. En este caso, diría que si uno tira un dado seis veces ¡*seguro* que sale un seis por lo menos una vez! Esto es claramente falso (haga la prueba y verá). En consecuencia, *multiplicar* la probabilidad individual de un evento por la cantidad de veces que uno lo va a repetir no calcula lo que uno quiere.

La paradoja de los cajones de Bertrand

Quiero contar un problema que suele generar múltiples controversias. Y está bien que eso suceda. En principio, la intuición indica una *potencial respuesta.* En general, esa respuesta no está bien y, por lo tanto, despierta —con toda razón— una rebelión frente al interlocutor. Téngame un poquito de paciencia y ya verá a qué me refiero.

De hecho, cuando el matemático francés Joseph Bertrand lo presentó en 1889 en su libro *Calcul des Probabilités* (*Cálculo de probabilidades*), la comunidad científica de la época entró en múltiples discusiones sobre si la solución presentada estaba bien o no. Es posible que a usted le pase lo mismo… o no. En cualquier caso, creo que vale la pena aprovechar este ejemplo para *educar la intuición* o *ponerla a prueba.*

Supongo que es innecesario, pero lo escribo igual: el problema tiene respuesta *única*. Es decir, más allá de lo que yo escriba a continuación, en ciencia *no existe el principio de autoridad*. Si no se queda satisfecha/o con lo que va a leer, ¡no lo acepte! Discútalo internamente (ya que yo no estoy allí con usted) hasta convencerse de que estoy equivocado yo o está equivocada/o usted. A mí no me crea nada: lo único que vale es *su propia deducción*.

Lo curioso es que —de acuerdo con mi experiencia— aun en el momento en el que uno entiende cuál es la verdadera respuesta… uno no se queda conforme. ¡Y está muy bien! Acá voy.

En una habitación hay tres escritorios iguales con dos cajones cada uno (como los que se ven en la figura 1) y cada cajón contiene exactamente una moneda. En total, son seis monedas. Uno de los escritorios tiene dos monedas de oro. En otro hay dos monedas de plata. Y en el restante, una moneda de cada metal. Desde afuera no hay manera de deducir qué contiene cada cajón.

Figura 1

Usted entra en esa habitación y elige un cajón de cualquiera de los tres escritorios. Lo abre y descubre que adentro hay una moneda de oro. Aquí es donde viene la pregunta (y el problema): "¿Cuál es la *probabilidad* de que en el *otro* cajón del *mismo* escritorio haya *también* una moneda de oro?".

Creo que el enunciado es sencillo y la pregunta es muy clara. Ahora le toca a usted.

Respuesta

Antes de proponerle que pensemos juntos la respuesta, tengo una pregunta: ¿a qué resultado llegó?

La *tentación* es decir que la probabilidad de que en el otro cajón haya una moneda de oro es ½ (50%). ¿Por qué? Una posible forma de razonar es la siguiente. Como usted tiene en la mano una moneda de oro, eso sirve para descartar al escritorio que tiene las dos monedas de plata. Los dos escritorios que quedan en *carrera* son el que tiene las dos monedas de oro y el que tiene una de cada una. Y esto es obviamente correcto.

¿Cómo seguir? Si la moneda de oro que usted tiene en la mano la encontró dentro del cajón que corresponde al escritorio que tiene dos monedas de oro, entonces la que queda es —justamente— de oro. Pero también podría haber sucedido que usted haya elegido el escritorio en el que cada cajón tiene una moneda de un metal distinto. En este caso, la que queda ¡es de plata!

Desde aquí, *parecería* —y quiero enfatizar esta palabra— que uno está en condiciones de *contestar la pregunta* de esta forma: "La probabilidad de que la otra moneda sea de oro es ½ (o, lo que es lo mismo, 50%)".

Sin embargo, esta respuesta *no es correcta*.

Puedo imaginarme su fastidio: "¿Cómo dijo? ¿Por qué? ¿Cómo que *no es correcta*? Si yo elegí una de oro, la que queda puede ser de oro o de plata y, por lo tanto, hay justo la mitad de posibilidades de que sea una u otra. ¿No se deduce que la probabilidad es justo ½ (un 50%)?

¿Dónde está el error".

Entiendo lo que me dice, pero ahora permítame incluir un elemento que no tuvimos en cuenta. Para hacer más gráfico el análisis, supongamos que las monedas que están dentro de los escritorios tienen una etiqueta.

Me explico: en el escritorio que contiene una de cada metal, llamo **O1** a la moneda de oro y **P1** a la de plata. Del mismo modo, llamo **O2** y **O3** a las dos monedas de oro que hay en el otro escritorio (el que tiene las dos monedas de oro).

Ahora, cuente conmigo cuáles son los escenarios posibles.

Posibilidad 1: usted abrió el cajón que contiene **O1** y, por lo tanto, en el otro cajón (que usted *no ve*) está **P1**. Perfecto.

Posibilidad 2: usted abrió el cajón que contiene **O2**. En ese caso, la moneda que queda es **O3** (y creo que usted ya se imagina hacia donde apunto). Hay una *tercera* posibilidad que debemos que incluir.

Posibilidad 3: usted abrió el cajón que contiene **O3**. En este caso, ¡la moneda que está en el otro cajón es **O2**!

¿Qué dice esto? De los tres escenarios posibles, en *dos de ellos ¡la otra moneda es de oro!* O sea, de las tres posibilidades, hay *dos* que dan moneda de oro (en el otro cajón), mientras que solamente *una* es de plata.

Conclusión: la probabilidad de que la otra moneda sea de oro es de 2/3 (o de casi un 66,67%). Dicho de otra forma: sobre los *tres* casos posibles, hay *dos* en los cuales la *otra* moneda es de oro. Dos sobre tres, o sea, 2/3.

Esto es lo que genera tanta controversia, porque uno *no advierte* que cuando abre el cajón y encuentra una moneda de oro pudo haber abierto cualquiera de los *tres* cajones que contenían monedas de oro. Como escribí antes, en solamente *uno* de los casos (si usted eligió **O1**) hay del otro lado una moneda de plata, mientras que en los otros dos la moneda restante es de oro.

Este problema parece fascinante no solo porque *atenta* contra la intuición, sino porque muestra cómo uno puede *entrenar* esa misma intuición como si fuera un músculo. Y en el camino, uno se educa, lo que ciertamente no es poco. ¿Usted qué pensó?

Otro recreo.
Juegos Olímpicos de Río de Janeiro

Hay cinco atletas que corrieron los 800 metros llanos en los Juegos Olímpicos de Río de Janeiro. Es una de las competencias más importantes dentro del atletismo. Se ubicaron en las cinco primeras posiciones. Los voy a llamar A, B, C, D y E.

Una persona los ve cenando en el comedor de la Villa Olímpica y les pregunta en qué orden salieron. Obtiene estas respuestas:

A = Yo no salí último
B = C salió tercero
C = E salió inmediatamente detrás de A D = B salió primero
E = D no salió primero

Suponiendo que los cinco fueron honestos con sus respuestas (o sea, *dijeron la verdad*), ¿en qué posición salieron?

B salió primero y **C** salió tercero. Luego, el orden tuvo que haber sido (por ahora):

BxCxx

Como **A** no salió último, entonces:

BACxx o BxCAx

Pero como **E** tuvo que haber salido inmediatamente detrás de A, esto fuerza a que sea la *segunda* opción: en la primera, el que salió inmediatamente detrás de A fue C. Luego, tuvo que haber sido:

BxCAE…

Y esto indica que el segundo tuvo que haber sido D. En consecuencia, el orden fue este:

BDCAE

Apéndice

Cada historia que aparece en este libro (como en *todos* los otros) fue revisada por un grupo de personas. El 21 de junio de 2017, recibí un correo electrónico de uno de ellos: Juan Sabia. Quiero compartir con usted lo que decía: “Adrián, ¿qué habría pasado si A y E se hubieran negado a contestar? ¿Serían suficientes los datos que aportaron B, C y D para deducir el orden en el que llegaron los cinco?” [81].

81. La respuesta es que *sí*. Si uno obviara lo que dijeron A y E (y le propongo que *no deje de hacerlo*), la conclusión sería la misma e incluso usted llegaría a ella *más rápido*. De modo que las frases de ambos resultan irrelevantes o, en todo caso, voy a usar la palabra ‘redundantes’.

¿Me conviene aceptar su desafío o no?

Este es un problema '*antiintuitivo*'. Lo planteo de manera tal que usted pueda pensarlo por su cuenta. Eventualmente después hacemos algunas reflexiones juntos (aunque yo no esté en el mismo lugar geográfico que usted).

Fíjese bien: acá tengo una moneda. Para que sea más sencillo escribir cada caso, voy a llamar C si sale 'cara' (como era esperable) y X si sale 'ceca' (esto ya no es tan *esperable*, pero como las dos empiezan con la letra 'c', es una alternativa posible para poder identificar de qué lado salió la moneda).

El problema se plantea porque hay dos pasajes para ir a Europa, con todo pago por un mes. ¿Quién se queda con los pasajes: usted o yo? Somos amigos pero al mismo tiempo estamos interesados en hacer el viaje y no queremos usar ninguno de los métodos convencionales. Es allí cuando usted me pregunta: "Adrián, si tiramos la moneda dos veces seguidas, ¿qué combinación te parece que es más probable que salga: CC o XC?" (o sea, cara-cara o ceca-cara).

Lo primero que pienso es en escribir *todas* las posibilidades que hay al tirar una moneda dos veces seguidas. ¿Cuántas y cuáles son? Las escribo acá:

CC
CX
XC
XX

Como se ve, hay cuatro posibilidades. Entre ellas, hay una sola entre cuatro de que salga CC (o sea, probabilidad ¼). Por otro lado, también hay una sola posibilidad entre cuatro de que salga XC (otra vez, probabilidad ¼).

Le contesto entonces: "La probabilidad es la misma = ¼".

"Bien", sigue usted. "Te propongo entonces que hagamos lo siguiente para decidir quién se queda con los pasajes. Yo voy a ir tirando la moneda repetidamente. Si en algún momento aparece la combinación CC, ganás vos y no hace falta seguir. En cambio, si en

algún momento aparece la combinación XC, gano yo. ¿Qué te parece? ¿Jugamos?".

Me quedé un rato pensando, pero no contesté rápido. Había algo que me hacía 'ruido'. ¿Usted qué haría? ¿Diría que sí o que no? Claramente, antes de aceptar deberíamos estar convencidos de que la probabilidad es la misma. Ya vimos que si tiramos la moneda solamente dos veces, la probabilidad es la misma. Pero al seguir arrojando la moneda hasta que salga una de las dos combinaciones, ¿no se alterará la probabilidad?

Lo dejo en libertad para que usted evalúe todo por su cuenta y yo sigo a continuación.

Una idea

Es curioso lo que pasa. No sé cómo lo fue imaginando usted, pero hay *algo* que me hacía 'ruido' y querría compartirlo.

Si usted empieza a tirar la moneda y sale CC, listo, gané yo y se terminó la historia. Claro que también terminaría si al tirarla las dos primeras veces sale XC. Allí gana usted. O sea, los dos tenemos las mismas chances al tirar la moneda las dos primeras veces: yo tengo una entre cuatro (CC) y usted también (XC).

Para que ni usted ni yo ganemos, en las primeras dos tiradas debe salir CX o XX, ¿de acuerdo? Fíjese bien que las únicas dos que pueden salir para que no gane ninguno de los dos terminan en X… dato que *no es menor*.

¿Entonces? Allí es donde creo que empieza la dificultad: si seguimos tirando la moneda, ¿qué podría pasar?

Si en la tercera tirada sale C, gana usted (porque habría una combinación XC que lo transforma en ganador). Pero si saliera X, ¡no gano yo! ¡No gana ninguno de los dos otra vez! Habría que seguir tirando la moneda y, una vez más, habría una X 'esperándolo a usted'…

Es decir, en el momento en que salga una C, gana usted seguro porque se producirá la combinación XC. Si en cambio siguen saliendo X, yo no gano nunca, y lo único que sucede es que seguimos tirando y tirando hasta que aparezca la C (que es lo que le sirve a usted).

Moraleja: ¡yo no puedo ganar nunca más! O gané de entrada con la combinación CC en las primeras dos tiradas, o no gano nunca más. Todo lo que me queda es esperar que la moneda siga saliendo siempre X porque, si no, en el momento en que aparezca la primera C… ¡listo!

¿No es antiintuitivo? ¿Cómo puede ser que lo que parecía 'equiprobable' —o sea, teníamos las mismas posibilidades de ganar

usted y yo si tirábamos la moneda *nada más que dos veces*—súbitamente se haya convertido en una derrota escandalosa para mí? Si no gané después de las dos primeras tiradas[82], ya no me queda *ninguna posibilidad*. No puedo aspirar a que pase 'nada' que tuerza ese destino. *¡Usted va a ganar siempre!*

¿Dónde tiene pensado ir? Me dijeron que las islas griegas son bárbaras. ¿Por qué habré dicho que sí sin pensar?

82. En resumen, la probabilidad de que gane yo es ¼. La suya es ¾. O gané en las dos primeras tiradas (y por eso la probabilidad ¼) o ganará usted.

Lorena y una estrategia ‘imposible’

El otro día me ‘tropecé’ con un problema que me pareció interesantísimo y también ‘muy difícil’. Por supuesto, el grado de dificultad tiene mucho que ver con el entrenamiento y la exposición que uno tenga frente a ese tipo de situaciones.

Me encantaría poder estar junto a usted para que lo pensáramos en ‘equipo’. A mí me llevó muchísimo tiempo y tuve que dejarlo varias veces hasta que se me ocurrió qué es lo que se podría hacer. Más aún: no solo quiero proponer el problema propiamente dicho, sino que, cuando lea la solución, le sugeriría que piense por qué funciona, lo cual no es necesariamente trivial.

En definitiva, el que sigue es un problema doble. Por un lado está el planteo. Después, aparece una estrategia que ‘pretende resolverlo’. Y por último, le quedará a usted la tarea de descubrir por qué lo que yo digo que funciona como solución es verdaderamente cierto.

Ahora le toca a usted. Yo sigo por acá.

Suponga que hay cinco postulantes para entrar a trabajar en una empresa. La persona que los va a evaluar, a quien voy a llamar señor E, les advierte que les va a proponer un problema que quizás los tenga ocupados durante mucho tiempo, y consiste en lo siguiente:

Cada uno tendrá una oficina asignada específicamente, a la que solo tendrá acceso el candidato. En otro lugar del mismo piso, habrá una sala ‘roja’ que en principio estará vacía, salvo por una silla y un interruptor de luz que activa una única lámpara que cuelga desde el techo. En el momento de empezar el experimento la luz estará apagada.

El señor E los va a invitar a pasar a esa sala de a uno por vez y permanecerán allí aislados, sin ver a nadie ni que nadie los vea durante cinco minutos. De hecho, todo el tiempo que dure el experimento estarán virtualmente *incomunicados* entre ellos y con el mundo exterior salvo con el señor E, a quien verán solamente cuando los invite para ir a la sala o los busque para llevarlos a su respectiva oficina, pero no podrán hablar con él.

Si un candidato es invitado a la sala roja, estará allí exactamente cinco minutos. Durante ese tiempo, podrá encender la lamparita si

está apagada, apagarla si está encendida o no hacer nada.

Pasados los cinco minutos, el señor E abrirá la puerta y la/lo acompañará de vuelta a la oficina que tenía asignada.

No hay restricciones respecto al número de veces que cada uno de ellos será invitado a la sala, y la elección será al azar. Más aún: cada candidata/o puede ser invitada/o a la sala múltiples veces.

Ahora, el problema: si en algún momento de este proceso alguno de ellos puede asegurar que los *cinco* ya estuvieron dentro de la sala roja *al menos una vez*, podrá llamar al señor E y comunicarle lo que dedujo.

Si la estrategia que diseñaron funcionó y pueden explicar por qué están seguros de que los cinco estuvieron en la sala *por lo menos una vez*, los cinco quedarán contratados. Si no, serán eliminados de la lista de candidatos.

Ese es el planteo. Previamente, los postulantes tienen media hora para diseñar una estrategia. Una vez que sean distribuidos en sus respectivas oficinas, ya no tendrán más oportunidades de comunicarse entre ellos.

El problema, aunque no lo parezca, *tiene solución*. Le sugiero que trate de diseñar una estrategia usted… cualquier cosa que yo escriba a continuación es totalmente irrelevante. No le sirve para nada. Lo *único* que tendrá algún valor es que busque alguna variante usted.

Una potencial estrategia

No sé si es la mejor, y estoy convencido de que no es la única, pero acá va.

Los cinco candidatos se ponen de acuerdo en designar a *uno* de ellos como 'la directora' o 'el director'. Supongamos que se llama Lorena. Lorena será la persona *distinguida* de los cinco pero también tendrá una misión diferente del resto. Esta es la estrategia.

1. Cuando cualquiera de los otros cuatro candidatos (cualquiera que no sea Lorena) entra en la sala roja, se fijará en la lamparita. Si está encendida, la deja como está; no importa si es la primera vez que entra o no. En cambio, si la bombita está apagada, *solamente la enciende si es la primera vez que entra en la sala roja y se encuentra con la bombita apagada*. Es decir, si la encuentra apagada pero ya la encendió alguna otra vez, la deja apagada.
2. Cuando Lorena entra en la sala roja, se fija también en la bombita. Si está apagada, la deja como está y no hace nada; solo

espera que pasen los cinco minutos para que el señor E la venga a retirar. En cambio, si está encendida, la apaga y empieza a contar cuántas veces le tocó hacer lo que acabo de describir. Por ejemplo, la *primera* vez que Lorena encontró la lámpara encendida, la apagó y anotó el número *uno*, porque es la primera vez que tuvo que apagar la luz. Pasados cinco minutos desde que ingresó, la van a venir a buscar y listo, pero ella ya tiene 'anotado' el número uno. Cuando Lorena entre nuevamente, se fijará en la bombita. Si está apagada, no hará nada. En cambio, si estuviera encendida, la apagará y anotará el número *dos* (porque es la segunda vez que tuvo que apagar la bombita). Por supuesto, si llegó a anotar algún número, el señor E tuvo que haber llevado a Lorena a la sala. Si no, toda esta descripción no sucedería.

3. Cuando Lorena haya llegado al número *cuatro*, podrá llamar al señor E y decirle que los cinco candidatos entraron al menos una vez en la sala roja.

¿Quiere pensar ahora por qué esta estrategia funciona?

Sigo yo (con algunas observaciones). Si usted relee las instrucciones, verá que la única persona que puede apagar la luz es Lorena. Los demás no hacen nada o solamente la pueden encender. Pero nunca apagar.

Ahora, observe este razonamiento. Cada vez que Lorena entra en la sala roja puede ser que encuentre la lamparita encendida o apagada.

1. Si Lorena la encuentra encendida, significa que alguno de los otros cuatro candidatos *tuvo que haber entrado por primera vez, y esto le permite a ella agregar uno en su cuenta personal*. Si no tenía ninguno anotado hasta allí, anotará 'uno', y eso significará que entró alguien por primera vez. Le pido que advierta que, aunque hayan entrado varios por primera vez, solamente el primero de ellos es quien pudo encenderla. Los otros, al entrar, sea por primera vez o no, la encontraron encendida y no debieron hacer nada. Es decir, cada candidato *enciende la luz una sola vez*, y eso sucede la primera vez que entra.
2. Analicemos ahora lo que sucede si al entrar Lorena en la sala 'roja' encuentra la luz *apagada*. Pudo haber pasado una de estas dos cosas:
    a. ella es la primera en entrar en la sala roja desde que empezó el experimento y, por lo tanto, nadie tuvo oportunidad de encender la luz (recuerde que al empezar

el test la luz estaba apagada);

b. desde que ella entró la última vez hasta ese momento, en la sala roja no hubo *ningún* otro candidato que ella ya no tuviera registrado. Por lo tanto, no tiene nada para agregar y sigue con la cuenta como la tenía hasta allí.

Como usted advierte, Lorena solamente puede agregar *uno* a su cuenta personal si desde que entró por última vez hasta ese momento solamente ingresó uno que ella no contó antes. Para haberlo contado antes, esa persona tuvo que haber *encendido* la luz y, en ese caso, como nadie la puede apagar, ella tiene que haberla encontrado encendida.

¿Qué sucede cuando Lorena llega a *cuatro* en su cuenta? ¿Por qué ella está en condiciones de decir que *todos* ya entraron al menos una vez?

Como cada postulante pudo (y debió) encender la luz *una sola vez* (la primera vez que entró), Lorena tuvo que haber ido registrando cada una de esas veces. Cuando llega a cuatro, ella ya sabe que entraron todos (obviamente, ella también) y está en condiciones de llamar al señor E y contarle lo que pasó. Y listo.

Moraleja

Yo elegí cinco personas y cambié el diseño, pero el problema tal como me fue presentado involucraba a 100 presos en una cárcel, encerrados en celdas individuales, y un carcelero (que haría el papel del señor E), quien quería ofrecerles una forma 'creativa' de dejarlos en libertad (siempre y cuando pudieran encontrar la estrategia que les permitiera decidir cuándo habían entrado los 100 en esa celda 'privilegiada', que sería la sala 'roja').

Esta estrategia funciona para cualquier número de personas, pero *requiere* de un hecho que yo no había advertido al leer el problema por primera vez: es muy importante que la luz esté apagada en el momento de empezar el experimento. ¿Por qué? ¿Quiere pensar usted?

Si la luz estuviera encendida y Lorena es la primera en ingresar en la sala roja, ella pondría su contador en *uno* pensando que alguno de sus compañeros estuvo en la sala antes que ella. Cuando llegue a cuatro, creerá (equivocadamente) que ya entraron todos, cuando en realidad todavía faltaría uno.

Si usted llegó hasta acá y cree que se puede encontrar alguna forma de resolver el problema sin pedir que la luz esté apagada al

empezar, habrá dado un paso más que no requiere de esa restricción. En cualquier caso, será *mejor* que la que yo acabo de exponer.

Nota

Si uno no supiera que la luz está apagada en el momento de empezar el test, la solución requiere de una 'ligera' modificación:

a. cada postulante (salvo Lorena) tiene que encender la luz si la ve apagada las primeras *dos* veces que entra en la sala. Después, sigue todo igual.
b. Lorena, en lugar de decir que *todos* entraron en la habitación por lo menos una vez cuando su cuenta llegue a *cuatro,* lo hará cuando llegue a *ocho*.

Con estos dos cambios, ya no importará si la luz estaba apagada o encendida en el momento de empezar el examen. Le dejo a usted la oportunidad de revisar por qué la estrategia ahora funciona[83].

83. Carlos D'Andrea me hizo una observación muy interesante: "Adrián, en el planteo del problema no se le pide a Lorena que elabore una estrategia 'óptima' sino que diseñe alguna que le permita estar segura de que entraron todos en la habitación. De hecho, Lorena podría seguir contando cinco, seis, siete… y detenerse cuando ella quisiera a partir de haber superado los cuatro o cinco, y el juego 'terminaría bien' igual. Lo mismo sucedería si no se supiera de entrada que la luz estaba apagada". Carlos tiene razón. Yo tuve la tentación de cambiar el enunciado y 'pedir' que la estrategia fuera lo más 'económica' posible, pero al final preferí dejar el problema como figura y agregar esta nota al pie, que ofrece más posibilidades para abordarlo.

Fútbol para pensar (parte 1)

Cada vez que hay un Mundial o que se juega la Copa Libertadores de América o la Copa Sudamericana, los hinchas de cada país o de cada equipo necesitan hacer algunos cálculos. Dejé para el final a quienes *me consta que también* los tienen que hacer: los cuerpos técnicos y los *jugadores*.

¿A qué me refiero? Sígame por acá. Tomemos un campeonato mundial, por ejemplo. Participan treinta y dos países divididos en ocho grupos de cuatro. De esos cuatro, los dos primeros se clasifican para la siguiente ronda[84].

En estos grupos de cuatro países (como en casi cualquier caso en el que haya cuatro participantes), los que tienen más puntos se clasifican para seguir en el torneo. Por supuesto, y a eso quiero llegar, no se me escapa que puede haber empates en puntos. Los organizadores *necesitan* contemplar estos casos porque sucede muy seguido.

En este caso, se apela a distintos métodos de *desempate*: el resultado obtenido en el partido entre ellos (entre los dos o tres que empataron), la cantidad de goles a favor o la diferencia de goles (entre a favor y en contra); o incluso se puede tomar la decisión *arrojando una moneda al aire*. No importa cómo, el hecho es que al concluir el 'cuadrangular' dos equipos *pasan* y dos quedan eliminados.

Justamente por eso quiero aprovechar para contestar algunas —potenciales— preguntas. Fíjese qué respuestas puede dar usted.

1. ¿Cuál es el *mínimo* número de puntos con los que se puede clasificar un equipo? (cualquiera sea el método para desempatar)
2. Al revés: ¿cuál es el *máximo* número de puntos que puede conseguir un equipo *e igual quedar eliminado*?

Ahora le toca a usted.

Ideas para pensar

Antes de hacer un análisis un poco más fino, creo que vale la pena preguntarse cuáles son *todos* los posibles puntajes que puede conseguir un equipo. Aunque parezca antiintuitivo, *no todos los posibles números entre cero y nueve se pueden alcanzar*. ¿Cuál o cuáles son *imposibles*? Deténgase acá y piense un ratito en soledad. Estoy seguro de que, si lo hace, entenderá un poco más la naturaleza del problema. Mientras tanto, yo sigo.

a. Claramente, se pueden obtener nueve puntos, el número ideal. Eso sucede si un equipo gana los tres partidos.
b. *No se pueden conseguir ocho*, porque para eso tendría que ganar dos (y llegar a seis), pero no hay ningún resultado posible del tercer partido que le otorgue dos puntos. Luego, el número *ocho* está eliminado.
c. Siete puntos, si un equipo gana dos partidos y empata el restante.
d. Seis puntos, si gana dos partidos y *pierde* el restante.
e. Cinco puntos, si gana un partido y empata los otros dos.
f. Cuatro puntos, si gana un partido, empata otro y pierde el restante.
g. Puede obtener tres puntos de dos maneras: o bien ganando un partido y perdiendo los otros dos, o bien empatando los tres partidos.
h. Dos puntos, si empata dos partidos y pierde el restante.
i. Un punto, si empata un partido y pierde los otros dos.
j. Cero puntos, si pierde los tres.

En definitiva, hemos comprobado que el *único* puntaje que *no se puede obtener es ocho*. Todos los demás, sí.

Ahora, con estos datos, tratemos de contestar la primera pregunta: ¿cuál será el *mínimo* número de puntos que podría obtener un equipo *pero clasificarse igual*?

¿Habrá alguna forma clasificar si obtuvo tres puntos?

Sí, se puede. Llamemos a los equipos A, B, C y D. Si A gana el partido frente a D y empata con B y con C, tiene cinco puntos.Si B y C empatan los tres partidos, ambos tienen tres puntos, y *alguno de los dos será quien clasifique y acompañe a A, que llegó primero*. Es que D perdió con A y empató con B y con C, luego tiene dos puntos. Esto demuestra entonces que *sí*: un equipo se *puede* clasificar con tres puntos.

Una vez que uno se convence de que con tres puntos un equipo se puede clasificar, cabe preguntarse entonces: ¿y con dos puntos? ¿Podrá clasificarse un equipo que consigue *nada más* que dos puntos?

Increíblemente, la respuesta *vuelve a ser sí*. ¿Cómo? ¿Quiere pensarlo por su cuenta primero?

Fíjese que podría suceder que A ganara sus tres partidos, con lo cual obtendría nueve puntos (y se clasifica seguro). Pero imagine ahora que *todos los partidos del grupo que no involucran a A* terminan empatados. Luego, B empata con C y con D; C empata con B y con D, y D empata con B y con C. Como todos perdieron con A y empataron sus restantes partidos, *los tres equipos terminan con ¡dos puntos!* Y como A está clasificado primero con nueve puntos y alguno de los otros tres equipos tiene que clasificarse también (ya que son *dos* los equipos que pasan de ronda), entonces sí, uno de los tres se clasificará con dos puntos.

Ahora bien: para poder *afirmar que dos puntos* es el mínimo puntaje con el que se puede clasificar un equipo, habría que convencerse de que *uno no se puede clasificar con nada más que un punto*. Yo sé que parece imposible, pero usted convendrá conmigo que también parecía muy difícil que se pudiera clasificar con dos puntos. ¿Con un punto, se podrá?

La respuesta es *no*, no se puede. ¿Por qué? Si un equipo consiguió nada más que un punto, tuvo que haber perdido dos de los tres partidos y empatado uno. Pero si perdió dos es porque hay dos equipos que tuvieron al menos tres puntos cada uno. Esos dos equipos ya tienen más puntos que el que sacó un punto, y con eso es suficiente.

Moraleja: "Dos es el *mínimo número de puntos que puede conseguir un equipo y clasificarse igual*".

Ahora quiero que fijemos juntos nuestra atención en la segunda pregunta: ¿cuál será el *máximo* número de puntos que podría conseguir un equipo y no clasificarse?

Por ejemplo, ¿podría no clasificarse si consigue *siete puntos*? Pensemos juntos. Supongamos que el equipo A tiene siete puntos. Eso significa que ganó dos de sus partidos (digamos a B y a C) y empató con D. Pero fíjese que como B y C ya perdieron un partido (con A) entonces *a lo sumo* podrán conseguir seis puntos. Luego, como ya hay dos equipos que tienen seis puntos, A se clasificará seguro. Es decir: con siete puntos un equipo se clasifica seguro.

¿Y con seis? ¿Será lo mismo? ¿Habrá alguna forma de que un equipo que tenga seis puntos no ingrese entre los dos primeros?

La respuesta es *sí*. ¿Cómo?

Una vez más, llamémoslos A, B, C y D. Supongamos que A, B y C le ganan a D. Ahora, pensemos que A le ganó a B, B le ganó a C, y C le ganó a D. De esta forma, salvo D, los otros tres (A, B y C) tienen seis

puntos cada uno. Como se clasifican dos, alguno de ellos se tendrá que quedar afuera (cualquiera sea el método de desempate).

Moraleja: “Sí, un equipo puede terminar con seis puntos y quedarse afuera”.

No le quepa ninguna duda de que no solo los simpatizantes o hinchas hacen cálculos. Los jugadores y los cuerpos técnicos… decididamente también.

84. Para *incluir* a todos los que quieran pensar el problema, aun a aquellos que no *siguen* ningún campeonato de fútbol, me apresuro a escribir que el ganador de un partido se lleva tres puntos, el perdedor ninguno, y si hay empate, cada uno se lleva un punto.

Fútbol para pensar (parte 2)

Una vez más quiero plantear un problema que tenga que ver con el fútbol y las posiciones en cualquier torneo en el que los equipos (o países) están divididos en grupos de cuatro. Esto sucede en todos los campeonatos del mundo, incluso en la Copa Libertadores de América o en la Copa de Campeones de Europa.

Uno de los atractivos que tiene cualquiera de estas competencias es que la cantidad de goles a favor (o en contra) suelen tener importancia para decidir cuáles pasan de ronda y cuáles no. Habitualmente se clasifican dos equipos por grupo, pero es muy frecuente que haya varios equipos que terminan con el mismo número de puntos. Allí es donde adquieren relevancia los diferentes métodos para desempatar.

Dicho esto, suponga ahora que hay un equipo que hizo *tres* goles en los tres partidos que jugó, y se sabe además que le convirtieron *dos* goles. Eso sí, no se sabe de qué forma se distribuyeron. Pudo haber empatado dos de los partidos 0 a 0 y ganado uno solo 3 a 2. O pudo haber ganado dos partidos 1 a 0 y perdido el restante 2 a 1. O cualquier otra posibilidad que cumpla con lo pedido: tres goles a favor y dos goles en contra.

Planteado de esta forma, ¿cuántos puntos pudo haber conseguido? ¿Quiere pensar usted?

Antes de avanzar con el análisis de posibilidades, un par de observaciones.

Primero, esto también es *hacer* matemática también, sin ninguna duda. Y es algo que sucede *muy frecuentemente* a nuestro alrededor. Es decir, en algún momento de su vida usted *se vio involucrado en pensar un problema de este tipo*, o bien escuchó o vio que alguna persona cercana a usted estuvo haciendo este tipo de cálculos.

Por otro lado, me parece relevante que *pensar de esta forma*, hilvanando distintas posibilidades, imaginando distintos escenarios, es algo muy útil en la vida cotidiana. Anticiparse a lo que podría pasar educa el cerebro, aunque más no sea porque nos prepara para la situación *real*. O, mejor dicho, cuando nos sucede algo de forma inesperada, uno puede reconocer que ya pasó por una situación de

este tipo, pues —aunque no sea *exactamente igual*— ya recorrió ciertos caminos que quizás ahora le sean útiles.

Ahora sigo con una forma de pensar la respuesta.

Por supuesto, hay *muchas formas* de abordar el problema. Uno podría considerar *todos* los posibles resultados y fijarse cuántos puntos podría obtener. O bien, recorrer los diez posibles puntajes (desde *cero* puntos, que es el mínimo, hasta *nueve*, que es el máximo) y ajustar los tres goles a favor y dos en contra para ver si es posible.

O también se puede reducir el número de posibilidades analizando *qué situaciones podrían darse y cuáles serían imposibles*.

Por ejemplo, el hecho de que el equipo haya conseguido *un gol más favor que en contra* implica que *al menos tuvo que haber ganado un partido*. Esto es muy importante, porque dice que debe tener al menos tres puntos.

Ahora bien: ¿pudo haber terminado *exactamente* con tres puntos?

Respuesta: Sí. ¿Cómo? Pudo haber ganado un partido 3 a 0, y luego perdido los otros dos por el mismo resultado: 0 a 1. De esta forma, convirtió tres goles, le hicieron dos, ganó un partido y perdió dos. En total consiguió tres puntos.

¿Podría haber terminado con *cuatro* puntos?

Respuesta: Sí. ¿Cómo? Pudo haber ganado un partido 2 a 0, empatado otro 1 a 1, y perdido el restante 0 a 1. De esta forma, respeta las condiciones del problema (hizo tres goles, le hicieron dos) y, como ganó un partido y empató otro, terminó con cuatro puntos.

¿Podría haber terminado con *cinco* puntos? (¿Quiere pensar usted en soledad?)

Sigo. Sí, también pudo haber conseguido cinco puntos. Para eso, tuvo que haber ganado *un partido* y *empatado* los otros dos. ¿Cómo? Pudo haber ganado un partido 1 a 0, y empatado los otros dos 1 a 1. Así consiguió los cinco puntos respetando también la consigna.

Avanzo un paso más. ¿Pudo haber obtenido *seis* puntos? En este caso, el equipo tuvo que haber ganado dos partidos y perdido el restante. ¿Pudo pasar eso con tres goles a favor y dos en contra?

La respuesta es *sí*, una vez más. Pudo haber ganado dos partidos por el mismo resultado (1 a 0) y perdido el restante (1 a 2).

¿Y *siete puntos*? Para conseguir siete puntos, tuvo que haber *ganado* dos partidos y *empatado* el restante. Como en total convirtió nada más que un gol más que los que le hicieron, tuvo que haber ganado los dos partidos 1 a 0. Allí tiene seis puntos. Pero acá se plantea un problema. Como ya '*usamos*' dos de los goles que hizo, nos queda *solamente un gol más a favor*. Pero necesitamos que en ese último partido le hayan convertido *dos*. Luego, ¡no pudo haber empatado ese tercer partido!

Moraleja: un equipo no puede haber hecho tres goles, que le hubieran convertido dos y al mismo tiempo haber conseguido siete puntos. Esa situación es imposible.

¿Pudo haber obtenido ocho puntos? No, porque ese puntaje es 'inconseguible' con independencia de la cantidad de goles a favor o en contra. Un equipo no puede terminar un cuadrangular de estas características con ocho puntos.

¿Y *nueve puntos*? Tampoco, porque tendría que haber ganado los tres partidos, es decir, necesitaría —por lo menos— tres goles más a favor que los que le hicieron, y eso ya no será posible.

Moraleja: si un equipo terminó con tres goles a favor y dos en contra, pudo haber obtenido tres, cuatro, cinco o seis puntos. Nada más. Y esto termina de contestar la pregunta original.

Fútbol para pensar (parte 3)

Este problema me lo propuso Juan Pablo Pinasco, gran matemático, gran aficionado al fútbol y además gran amigo.

La locura de los campeonatos actuales (2017 y años previos) permitió que se hiciera un torneo de Primera División en la Argentina en el que participaron 30 equipos. Por lo tanto, cada uno jugó 29 partidos.

Dicho esto, si un equipo (que voy a llamar "Matemática Juniors") terminó el torneo con 56 puntos, ¿cuántos partidos pudo haber perdido *como máximo*?

Respuesta

Como cada equipo jugó en total 29 partidos, si los hubiera ganado todos habría logrado 87 puntos. Por lo tanto, si Matemática Juniors obtuvo 56, quiere decir que en total perdió 31 puntos.

La primera tentación —creo— es decir que perdió 10 partidos. De esa forma, perdió 30 de los 31 puntos que contabilizamos antes. Hasta aquí, todo bien, pero ¿cómo hizo para perder un punto más? Puesto de otra forma: ¿se puede perder *nada más que un punto en un partido*?

La respuesta es no, ¡no se puede! Le propongo que lo piense conmigo.

Hay tres posibilidades: si hay un ganador, ese equipo no pierde ningún punto. Si lo empata, ¡pierde *dos* puntos! Y si pierde el partido, ¡pierde los tres! Como se ve, *no hay manera de perder nada más que uno*.

Ahora podemos volver al problema original. Con este dato, si Matemática Juniors perdió 10 partidos, no pudo haber perdido el punto que le falta en un empate. ¿Y entonces?

Tuvo que haber perdido los 31 puntos de otra forma. Veamos qué pasa si perdió nueve partidos (y no diez). En ese caso, de los 31 perdió 27 en esos nueve encuentros. ¿Y los cuatro restantes? ¿Quiere pensar usted?

Sí, como intuyo que está pensando, los otros cuatro los perdió al

empatar *dos* partidos. ¡Y esa es la solución final!

En definitiva, si uno busca saber cuál fue la *mayor cantidad de partidos que pudo perder* Matemática Juniors (si jugó en total 29 y consiguió 56 puntos), la respuesta es: "*Perdió 9, empató 2 y ganó* ***todos*** *los restantes*".

Lógica y estrategia para ordenar las cartas

Se tienen 10 naipes con los números del 1 al 10. Se apilan boca abajo y se repite el siguiente proceso: se da vuelta el naipe de arriba de la pila, se lo deja sobre la mesa y se pasa el siguiente naipe —sin darlo vuelta— al fondo de la pila. Cuando queda un solo naipe en la pila, se lo da vuelta.

¿Cómo deben ordenarse los naipes en la pila inicial para que, al darlos vuelta, aparezcan en el orden 1, 2, 3… hasta 10?

Solución

Hay que comenzar con las cartas en el orden 1-6-2-10-3-7-4-9-5-8. La pregunta que surge inmediatamente es: "¿Por qué?".

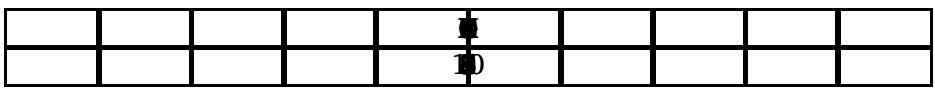
Escribo acá una manera de deducir ese orden, la que se me ocurrió a mí. Yo empecé pensando que tenía 10 cartas con las siguientes letras:

A-B-C-D-E-F-G-H-I-J

Cuando comencé con el procedimiento indicado antes, las cartas fueron apareciendo en este orden (le sugiero que lo intente por su cuenta):

A-C-E-G-I-B-F-J-H-D

A partir de acá, ya fue más fácil, porque le 'asigné' a cada letra de este orden el número correspondiente del 1 al 10, que es —en definitiva— el orden en el que yo quería que aparecieran.



Y llevando esta asignación al orden inicial de las letras, quedaría:

El collar de 11 perlas

Este es un problema precioso para entretenerse. No hay que *saber nada en particular*, y supongo que la mejor manera de encontrar la solución es con 'prueba y error'. Luego, una vez que se *tropiece* con la respuesta, tengo otras preguntas para hacerle, pero usted ya se sentirá más cómoda/o porque al menos ya tiene *algo* para exhibir después del tiempo que invirtió. Me explico.

Suponga que una señora tiene un collar con 11 perlas. Cada perla está numerada de forma consecutiva. Para estar seguros de que me supe explicar, imagine que apoya el collar como si fuera un reloj circular, con el número *uno* puesto en el lugar que le correspondería al *número 12* (en el reloj). A partir de aquí, la numeración seguiría en el mismo orden creciente que las horas en un reloj convencional, solo que en lugar de doce números tiene once.

Esta misma señora tiene además *otro* collar exactamente igual, con perlas del mismo tipo, pero la diferencia consiste en que ahora las perlas *no llevan ningún número*. El problema consiste en encontrar alguna forma de numerar las perlas del segundo collar de manera tal que si uno apoya un collar sobre otro, no importa si lo pone *al derecho o al revés*, siempre haya por lo menos un número que coincida en ambos collares. Ya sé, usted se está preguntando: "¿Qué quiere decir *al derecho y al revés*?". Bueno, siguiendo con el ejemplo del reloj, imagine que usted tuviera un reloj apoyado de forma convencional, y otro 'dado vuelta', de manera tal que los números (las horas) *crecen* hacia la izquierda. En ese caso, el número *tres* estaría donde normalmente está el número *nueve*, y el número *cuatro* donde va el número *ocho*. Los dos únicos números que coincidirían (en el caso de dos relojes) serían el *doce* y el *seis*.

Una observación importante: fíjese que, en el caso del collar, hay *once perlas*. En un reloj, hay *doce* números. Son ejemplos parecidos, pero no iguales.

Ahora que nos pusimos de acuerdo con el enunciado, le sugiero que estudie cómo hacer para numerar las perlas del segundo collar. Una vez que haya encontrado alguna forma, yo vuelvo para proponerle otras preguntas.

Quiero dejar constancia de que yo me entretuve muchísimo buscando al menos *una* solución. Probé de muchas formas y, como suele sucederme, la gran mayoría no me sirvió para encontrar la respuesta sino para entender mejor el problema. En el camino, descubrí dónde estaban las dificultades y, después de varios intentos, encontré una numeración que sirve.

Acá va. Eso sí, créame: si la va a leer sin haber intentado nada por su cuenta, solo le servirá para convencerse de que por lo menos existe *alguna solución*, nada más.

Uno podría numerar el segundo collar así:

1	3	5	7	9	11	2	4	6	8	10

Haga la prueba. Yo voy a hacer una 'representación' que —me parece— es más sencilla (usted siéntase en libertad de elegir la forma que quiera, obviamente).

Voy a escribir el collar como si lo hubiera cortado y pegado (que es el equivalente de mirar cómo quedan ubicados los números en el caso circular).

1	3	5	7	9	11	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9	11	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9	11	2	4	6	8	10

Ahora, ubico arriba el collar numerado originalmente y abajo el que acabo de escribir. *Miremos* qué número coincide.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	3	5	7	9	11	2	4	6	8	10	**1**	3	5	7	9	11	2	4	6	8	10	**1**	3	5	7	9	11	2	4	6	8	10

Como se ve, el *número que coincide es el uno*. Ahora lo *muevo* hacia la izquierda un lugar. Dejo las primeras dos filas como estaban antes. La tercera resulta de haber movido la segunda una posición. Se tiene el siguiente esquema, entonces:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	3	5	7	9	11	2	4	6	8	10	**1**	3	5	7	9	11	2	4	6	8	10	**1**	3	5	7	9	11	2	4	6	8	10
3	5	7	9	11	2	4	6	8	**10**	1	3	5	7	9	11	2	4	6	8	**10**	1	3	5	7	9	11	2	4	6	8	**10**	1

Vuelvo a hacer lo mismo con varias filas al mismo tiempo, remarcando la coincidencia en cada fila. Se da esta representación:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	3	5	7	9	11	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9	11	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9	11	2	4	6	8	10
3	5	7	9	11	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9	11	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9	11	2	4	6	8	10	1
5	7	9	11	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9	11	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9	11	2	4	6	8	10	1	3
7	9	11	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9	11	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9	11	2	4	6	8	10	1	3	5
9	11	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9	11	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9	11	2	4	6	8	10	1	3	5	7
11	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9	11	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9	11	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9

Lo mismo podría hacer ubicando la segunda fila en la *otra* dirección, como si hubiera *dado vuelta el collar*. Se obtiene una representación de este tipo (en las primeras filas):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	10	8	6	4	2	11	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2	11	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2	11	9	7	5	3
10	8	6	4	2	11	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2	11	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2	11	9	7	5	3	1
8	6	4	2	11	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2	11	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2	11	9	7	5	3	1	10
6	4	2	11	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2	11	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2	11	9	7	5	3	1	10	8
4	2	11	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2	11	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2	11	9	7	5	3	1	10	8	6
2	11	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2	11	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2	11	9	7	5	3	1	10	8	6	4
11	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2	11	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2	11	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2

A partir de acá, creo que usted puede rellenar lo que falta para convencerse de que la numeración que propuse para el segundo collar *funciona tanto al derecho como al revés*.

Le propongo que se fije cómo va variando el número en el que coinciden. En la primera tanda, cuando girábamos en un sentido, los números que coincidieron fueron (respectivamente): 1, 10, 8, 6, 4, 2… Si usted siguiera obtendríamos: 11, 9, 7, 5, 3… Después, al repetir el procedimiento *once veces*, llegaríamos nuevamente al número *uno*. Lo interesante es que las coincidencias van salteando *de a una*, de la misma forma en la que está distribuida la numeración de las perlas. Compruébelo usted para convencerse. En cambio, al ir en la *otra dirección*, las coincidencias van salteando de a *cuatro*. Me parece notable que, al ir salteando de a cuatro, uno pueda recorrer los once números del collar sin repetir antes de haber dado toda la vuelta, o sea, después de haber rotado el collar *once veces*.

Ahora tengo más preguntas.

a. ¿La que le presenté acá es la única solución?
b. En todo caso, si hubiera más, ¿cuántas serían? ¿Se pueden exhibir todas?
c. ¿Qué pasaría si *cambiáramos* el número de perlas? ¿Y si hubiera un collar con *menos* perlas? ¿O con *más* perlas?
d. ¿Tendrá algo que ver que el número *once* (el número de perlas

original) es un número *primo* (o sea, divisible únicamente por él mismo y por el número *uno*)?

Como usted ve, las preguntas son de distintas *calidades*. Ahora queda abierto un panorama diferente.

A continuación le acerco algunas respuestas, pero para contestarlas todas creo que usted debería sentarse con tiempo y pensar en soledad. O en todo caso, 'rastrear' otras exploraciones que se hayan hecho sobre este tema.

Algunas respuestas

Hay más soluciones al problema original. Voy a escribir acá tres más (que son *todas* las que admite este problema):

1	4	7	10	2	5	8	11	3	6	9

1	5	9	2	6	10	3	7	11	4	8

1	6	11	5	10	4	9	3	8	2	7

El número de *perlas* importa mucho para poder determinar la existencia o no de soluciones. Algunos ejemplos (que creo que le van a servir para abordar el problema de forma tan general como quiera): Para empezar con uno *extremo*, tome el caso de un collar de *dos* perlas solamente. Las numeramos como *uno* y *dos*. Ahora bien: el segundo collar estará numerado *igual* que el primero, porque como las perlas están ligadas, una llevará el número *uno* y la otra el *dos*. Cuando usted apoye las dos perlas con el número uno, la otra quedará arriba de la segunda, también. Si usted mueve el collar de arriba, eso desajustará no solo la primera coincidencia, también la segunda, y como solamente hay dos movimientos posibles, el problema no tiene solución. Es decir: en el caso de dos perlas, no hay forma de numerar el segundo collar de manera tal que cumpla con la condición pedida.

¿Y si el original fuera un collar de tres perlas? Le propongo que pensemos juntos. El primer collar estará numerado como 1-2-3. ¿Qué alternativas tenemos para el segundo collar? Una forma es pintarles los mismos números. ¿Servirá? Fíjese que no, porque ni bien apoyo los dos números *uno*, coinciden no solo ellos, sino también los otros dos. Cualquier 'corrimiento' que haga en una u otra dirección impide que

haya cualquier coincidencia.

Lo interesante es que la *otra* alternativa (y única más) es pintarlas así: 1-3-2. Cuando uno superpone el collar original con el que está pintado de esta forma, en el primer caso coincide solamente la perla número *uno*, y al ir haciendo corrimientos hacia la derecha, primero coincide la *dos* y después la *tres*. Pero ni bien uno 'da vuelta' el collar, entonces queda numerado 1-2-3 y, por lo tanto, el *único* caso en el que coinciden es cuando coinciden las tres perlas. Moraleja: en el caso de tres perlas, *no hay solución tampoco*.

Como usted ve, el problema es interesantísimo y merece mayor espacio (y tiempo). Por ahora, eso se lo dejo a usted. Espero haber despertado su curiosidad. ¡Ah! Esto es hacer matemática también. Qué número de perlas el problema tiene solución, qué dependencia hay de que el número sea primo (o no), qué relación hay entre el número de vueltas que hago dar al collar de arriba con el número de perla que coincide, etc., son preguntas que merecen ser contestadas. Usted tiene la palabra.

Geometría sin fórmulas (parte 1)

Mire la figura 1.

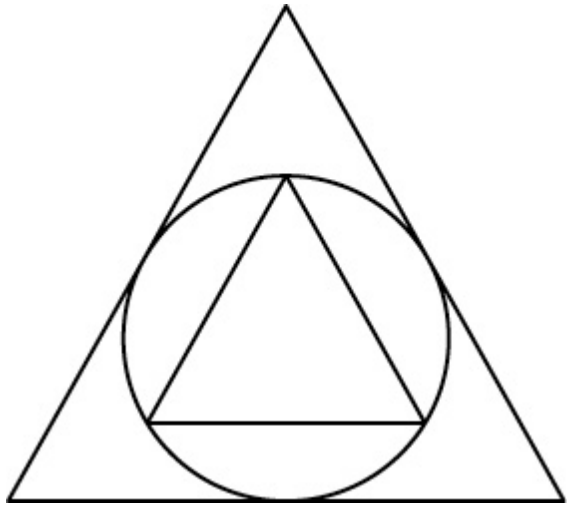


Figura 1

Como usted advierte, hay dos triángulos y un círculo. Está claro que uno de los dos triángulos es mucho más grande que el otro.

Yo podría preguntarle, entonces: "¿Puede determinar usted *cuánto* más grandes?".

Acá quiero hacer una pausa para advertirle que, si sigue leyendo, en las próximas líneas encontrará la respuesta. Es por eso que le propongo que se detenga y retome el texto una vez que le haya dedicado un rato a pensar cómo contestar la pregunta.

Sigo. Otra forma de plantear *el mismo* problema es la siguiente: "Sin usar ninguna fórmula, ¿se puede explicar que el triángulo más grande es cuatro veces mayor que el más chico?".

Siéntase libre de rotar o mover la figura como quiera pero no escriba nada: solo use su 'vista' y su 'sentido común'.

Solución

Imagine que usted puede ‘rotar’ (o hacer ‘girar’) el círculo hacia la derecha (podría ser para el otro lado, pero es irrelevante el sentido con el que empiece) dejando fijo el triángulo de afuera. Está claro que cualquier movimiento de este tipo no modificará las proporciones de las áreas.

Mientras hace la rotación, imagine que el triángulo más pequeño gira también.

Rote el círculo hasta que el triángulo interno quede con la ‘base’ hacia arriba, o sea, ‘boca abajo’. La figura que se obtiene es esta:

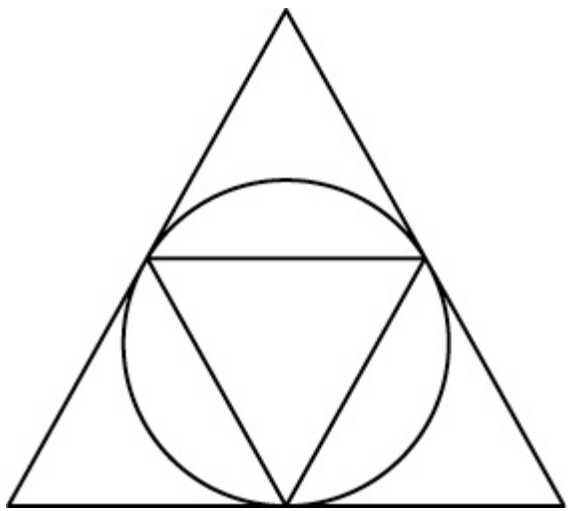


Figura 2

¿No es notable? Si yo hubiera empezado con la figura 2 en lugar de la figura 1, la respuesta habría sido trivial, ¿no? Es increíble lo que podemos hacer con las imágenes y con nuestra percepción visual. Y me permito agregar algo más: muchísimas veces, analizar un problema desde un ángulo diferente (que parece una verdadera tontería) suele ofrecer una visión tan inesperada que uno *no* entiende cómo es posible que no se le haya ocurrido antes.

Geometría sin fórmulas (parte 2)

El siguiente problema tiene la particularidad de que se puede contestar sin necesidad de escribir nada. Todo lo necesario 'está a la vista'. Mi primera tentación fue buscar la respuesta utilizando argumentos convencionales, pero al final, después de pensar un largo rato, terminé yendo por otro lado totalmente inesperado (para mí).

De todas formas, mientras escribo esto estoy pensando: ¿estará bien lo que estoy diciendo? ¿Y si a usted lo primero que se le ocurre es exactamente lo que hay que pensar para deducir la solución? ¿Quién dice que mi manera de pensar será la suya? ¿O viceversa?

Bien, en todo caso, le propongo lo siguiente: yo planteo el problema y la/lo dejo en soledad para que usted decida cómo lo piensa. Si se le ocurre la solución de forma inmediata, mi suposición era equivocada. Si no es así, y si requiere de usted algo no tan inmediato, entonces me sentiré un poco más acompañado.

Basta de preámbulos. Concéntrese en la figura 1.

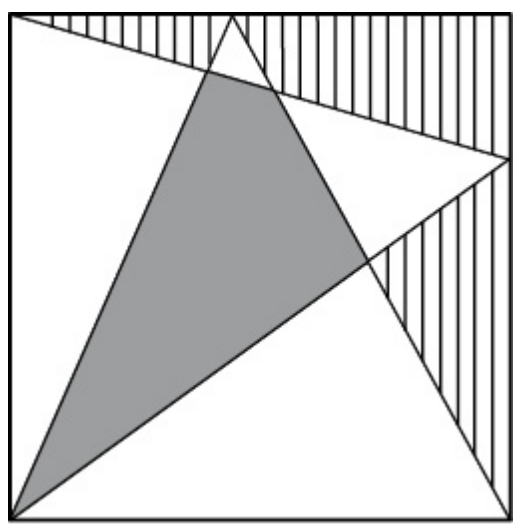


Figura 1

Por un lado, hay un cuadrado. Dentro de ese cuadrado aparecen

varios triángulos, pero présteles atención a dos de ellos: son los que tienen como 'base' uno de los lados del cuadrado.

Uno es el que está apoyado en la pared izquierda del cuadrado y el otro está apoyado en la base inferior del cuadrado. Por lo tanto, cada uno de estos dos triángulos tiene dos vértices que coinciden con dos vértices del cuadrado, mientras que el tercero está ubicado en un punto del otro lado del cuadrado.

Como usted advierte, los dos triángulos se cortan (en la figura 1 es la parte 'sombreada'). La otra región distinguida es el área que no pertenece a ninguno de los dos triángulos (la que aparece 'rayada').

Ahora, la pregunta: ¿Cuál de estas dos áreas es más grande? ¿El área en la que se superponen ('sombreada') o el área que no corresponde a ninguno de los dos ('rayada')?

Como podrá observar, no hay nada particular que hacer sino mirar con cuidado y analizar la figura que tiene delante de los ojos. El resto se lo dejo a usted. Eso sí: lo único que creo que es necesario saber es que el área de un triángulo se puede calcular como la mitad de la base por la altura. Salvo eso, creo que no hace falta ningún otro tipo de conocimiento previo. Usted será el juez.

Idea para la solución

Fíjese en los dos triángulos que señalé antes y que aparecen en la figura 1. La base de cada uno de ellos coincide con uno de los lados del cuadrado. Como el tercer vértice de cada triángulo está en el lado opuesto del cuadrado, eso significa que la altura de cada triángulo tiene la misma medida que el lado del cuadrado (observe la figura para convencerse. No me crea a mí, descúbralo usted).

Dicho esto, como sabemos que el área de cada uno de estos triángulos se puede calcular como la mitad del lado del cuadrado (por ser la base) por la altura (que también coincide con el lado del cuadrado), entonces se deduce lo siguiente:

$$\text{Área de cada triángulo} = ((\text{lado del cuadrado}) \times (\text{lado del cuadrado})/2)$$

En este caso, el área de cada triángulo es

$$(\text{lado} \times \text{lado})/2$$

O sea, hemos *descubierto* que el área de cada uno de estos dos

triángulos particulares es igual a ¡la mitad del área del cuadrado!

Mire ahora la figura 2.

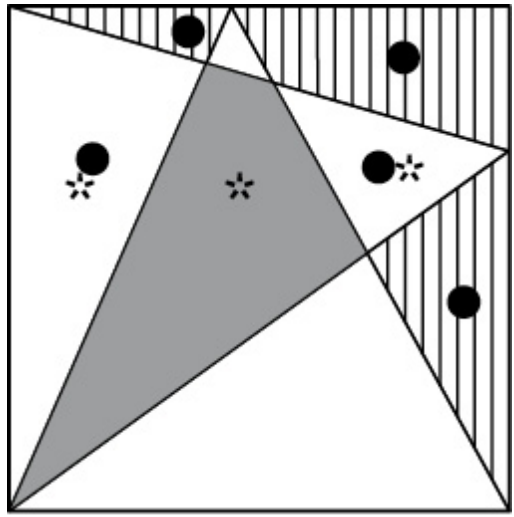


Figura 2

Los sectores que figuran con un *punto negro* son todos los que no están en el triángulo vertical. Si uno suma las áreas marcadas con el *punto negro*, se obtiene la misma superficie que la del triángulo vertical porque —como vimos antes— lo que está adentro y lo que está afuera miden lo mismo (igual a la mitad del área del cuadrado).

Por otro lado, si uno suma las regiones marcadas con un *asterisco*, se obtiene el área del segundo triángulo, el que está de forma horizontal. Luego, el área medida por la suma de los *puntos negros* tiene que ser igual al área de la suma de los *asteriscos*.

Dicho esto, como hay dos sectores que tienen puntos negros y asteriscos simultáneamente, uno deduce que la región que tiene solamente un asterisco tiene que ser igual a la región que tiene solamente puntos negros.

¡Y eso era lo que queríamos comparar! La que tiene el asterisco solamente es la región en la que coinciden los dos triángulos; y las que tienen un punto negro únicamente son las que no tocan a ninguno de los dos triángulos.

Es decir, hemos respondido la pregunta original: *¡esas dos áreas son iguales!* El área en la que se cortan los dos triángulos y el área en la que no hay ninguno de los dos triángulos son iguales.

Como usted ve, salvo la fórmula del área de un triángulo, no fue necesario ni usar ni saber más nada. Solo pensar con un poco de cuidado y acercarse al problema de forma un poco más… ¿lateral?

Créame que no aspiro a tener ninguna respuesta, pero *necesito* hacerlas. ¿A usted qué le pasó con el problema? ¿La solución se le ocurrió enseguida? ¿Hubo *algo* que le hiciera sospechar que las áreas tenían que ser iguales? ¿Cómo lo pensó?

No sabe cómo me gustaría poder estar a su lado para escuchar sus reflexiones. Seguro que eso me ayudaría muchísimo para educar mi percepción.

Sam Loyd (y la introducción a las ecuaciones)

Uno de los factores que nos distinguen de los animales es nuestra capacidad para pensar. No quiero decir que los animales no piensan porque eso no solo es falso, sino que es una brutalidad. Pero lo que sí distingue al *hombre* del resto de los seres vivos (al menos, de los que conocemos hasta ahora) es nuestra capacidad para *hilvanar* razonamientos, para poder *imaginar* potenciales situaciones y elaborar estrategias para enfrentarlas. Y para *crear o inventar fantasías*. ¿Los animales podrán también?

Justamente, poder planificar es algo inherente a nuestra condición, y poder predecir qué hacer con mucha anticipación es una tarea *altamente no trivial*. Una de las manifestaciones más evidentes es cuando uno necesita elaborar estrategias para *jugar*. Sí, jugar. Propóngase pensar en cómo abordar cualquier juego y verá que, por más simple que sea, usted necesita *pensar* qué hacer ante diferentes escenarios, incluso si está por jugar al ta-te-ti. A medida que el propio juego se hace más sofisticado, requiere de mayor capacidad de observación, de crear una suerte de 'árbol' que le permita imaginar qué caminos tomar en función de los que va tomando su adversario. Uno de los casos más *extremos* (y bonitos) es el del ajedrez. De hecho, los grandes jugadores son aquellos que pueden anticipar qué hacer muchas jugadas antes, algo así como 'estar preparado para el futuro'.

Naturalmente, esa capacidad *se entrena*. Para vivir en sociedad, estamos todo el tiempo imaginando situaciones que vamos a enfrentar potencialmente: desde las más banales o pedestres (a qué hora levantarse para llegar al colegio o al trabajo, cuánto cambio llevar para pagar un colectivo o un taxi), hasta otras más sofisticadas (elegir la/el compañera/o para toda la vida, en qué facultad inscribirse, qué departamento alquilar y/o comprar).

Yo estoy convencido de que los juegos son una forma de 'simular la realidad' y sirven de 'entrenamiento constante', no solo como forma de entretenimiento sino también como preparación para enfrentar una competencia.

Con toda esta presentación, me cuesta trabajo volver al tema. Uno de los más grandes *generadores de problemas para pensar* fue un

norteamericano nacido en Filadelfia a fines de enero de 1841. Sus padres lo llamaron Samuel, pero el mundo lo conoce hoy como Sam, a secas. Ah, y de apellido, Floyd. Floyd fue un buen jugador de ajedrez y llegó a ubicarse como número 15 en el planeta, pero no fue esa la razón por la que ganó prestigio. Cuando falleció, recién cumplidos los 70 años, su hijo compiló *todos* sus trabajos y los publicó en 1914 con el nombre de *Cyclopedia of 5000 Puzzles* (*Ciclopedia de 5000 puzzles*[85]).

Como el propio título del libro lo indica, intentar elegir *uno* entre los cinco mil es *técnicamente imposible*, y encima elegí uno particular que sirve para mostrar por qué razón se *inventaron* las ecuaciones. No se deje amedrentar por la palabra *ecuación*. Fíjese en el problema que le voy a plantear, trate de resolverlo y después, juntos, pensamos cómo usarlas. Una vez más, enfrente el problema con toda ingenuidad: para resolverlo, ¡no hace falta *saber nada particular ni utilizar ningún tipo de herramienta sofisticada*! Todo lo que hay que hacer es (curiosamente) pensar…

Acá va. Fíjese en la siguiente figura.

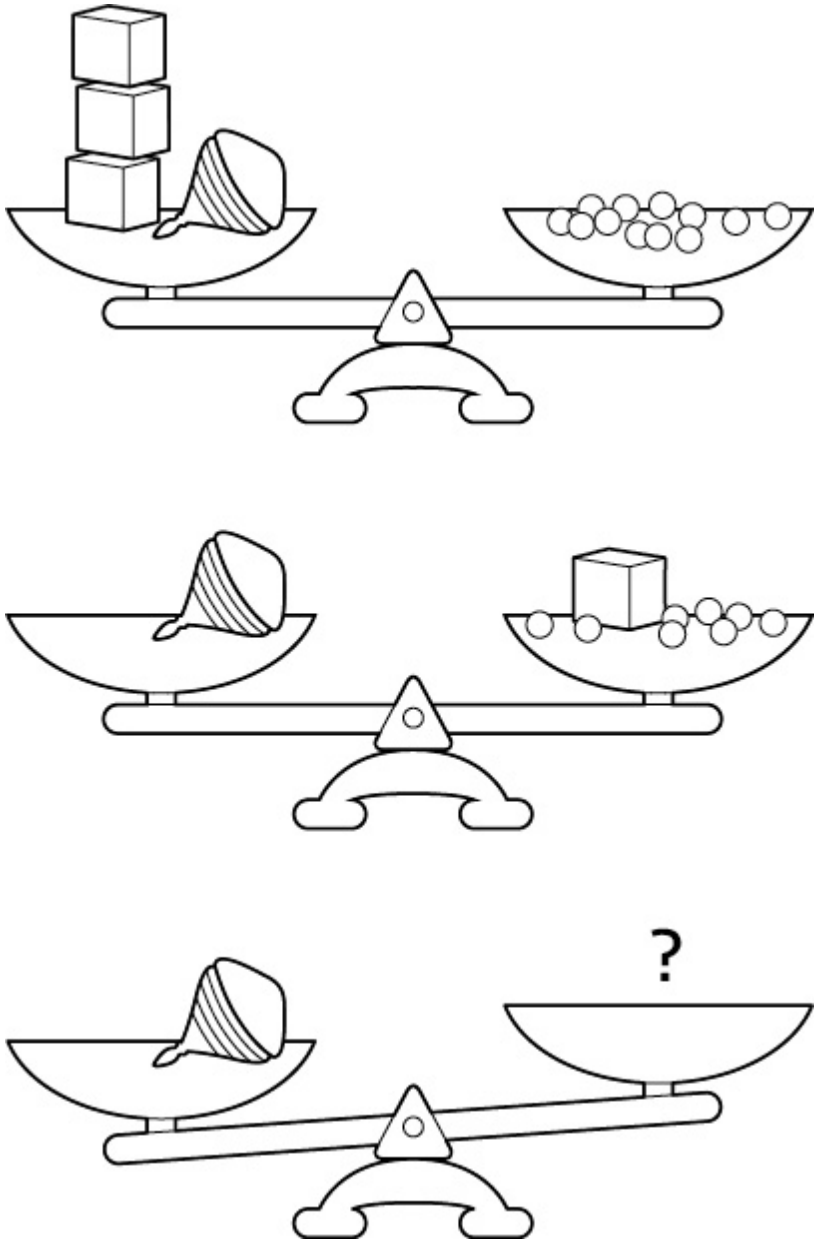


Figura 1

Ahora le pido que pensemos juntos la solución (si es que usted no la quiere encarar en soledad).

Las primeras dos balanzas están expresando *igualdades*. Es decir, cada una de las primeras dos pesadas establece una paridad en lo que está ubicado en cada platillo.

En la primera pesada, en el platillo de la izquierda hay 1 caracol y

3 cubos, y en el platillo de la derecha hay 12 bolitas.

En la segunda pesada, en el platillo de la izquierda está solamente el caracol, y para compensar el peso aparecen 1 cubo y 8 bolitas.

Lo que estas dos pesadas dicen es que *pesan lo mismo*:

a) 3 (cubos) y 1 (caracol) = 12 (bolitas)
b) 1 (caracol) = 1 (cubo) y 8 (bolitas)

Con estos datos, pensemos *cuántas bolitas* habría que poner en el platillo de la derecha en la tercera pesada para *igualar* el peso del caracol (que aparece en el platillo de la izquierda).

El objetivo entonces es *calcular* el peso del caracol ¡*en términos de bolitas*!

¿No quiere avanzar en soledad? ¿Para qué me necesita a mí? En todo caso, si logra detectar lo que hay que hacer, puede comparar su respuesta con lo que yo sigo escribiendo acá. En fin… usted decide.

Sigo yo. Observe la segunda pesada. Por un lado tiene el caracol, y del lado de la derecha, 1 cubo y 8 bolitas. Usted sabe que la balanza está equilibrada. Pregunta: si agregara dos objetos cualesquiera del mismo peso, uno de cada lado de la balanza, ¿se inclinaría para alguno de los dos lados? No. ¿Por qué? Es que si la balanza estaba equilibrada de antemano y uno agrega el mismo peso de los dos lados, ¡va a seguir en equilibrio!

Por lo tanto, le propongo que le agreguemos tres cubos de cada lado (la segunda pesada). Del lado izquierdo, vamos a tener *un caracol y tres cubos*, y en el platillo de la derecha van a quedar las mismas 8 bolitas, pero ahora habrá *cuatro cubos*. Como señalé antes, los platillos van a seguir igualados.

Uno descubre entonces (de la segunda pesada) que *un caracol y tres cubos* pesan lo mismo que *ocho bolitas y cuatro cubos*. (*)

Por otro lado, de la primera pesada, sabíamos que *un caracol y tres cubos* pesan lo mismo que *12 bolitas*. (**)

Ahora, fíjese que hemos aprendido que “un caracol y tres cubos”, pesan lo mismo que “ocho bolitas y cuatro cubos” y, por otro lado, que “12 bolitas”.

Si pusiéramos en el platillo de la izquierda “ocho bolitas y cuatro cubos”, y en el platillo de la derecha “12 bolitas”, la balanza estaría equilibrada.

Si ahora *sacamos ocho bolitas de cada uno de los dos platillos*, en el de la izquierda aparecen cuatro cubos pero ¡no quedan bolitas!, y en el platillo de la derecha quedan nada más que “cuatro bolitas”.

En consecuencia, hemos descubierto que ‘cuatro cubos’ pesan lo

mismo que ‘cuatro bolitas’, o lo que es lo mismo, ‘un cubo’ pesa lo mismo que ‘una bolita’. (***)

Ya falta muy poco, porque si el peso de cada bolita es lo mismo que el peso de cada cubo, mirando la segunda pesada, *reemplazo* el cubo por otra bolita. Ahora, habrá *nueve bolitas* (en el platillo de la derecha) y el caracol estará del lado izquierdo. Con esto, hemos contestado la pregunta. ¿Cuántas bolitas hacen falta para equiparar la balanza en la tercera pesada? Pues *exactamente nueve* bolitas. Y listo.

Que entren las ecuaciones de una buena vez

Si usted llegó conmigo hasta acá, habrá advertido que tuve que escribir *muchísimas palabras* y *repetir muchísimas veces* la misma idea. ¿No habrá alguna manera de *reemplazar* todos los nombres y —eventualmente— hacer el análisis de forma mucho más *genérica*? Es decir, yo usé el ejemplo de bolitas, cubos, caracoles, pero —creo— no se le escapará que podría haber hecho lo mismo con cualquier otro objeto. *Solamente* habría necesitado que se respeten las igualdades que aparecieron en la balanza.

Le propongo que hagamos un cambio en *todo* lo que escribí antes. En los lugares en los que puse la palabra ‘bolita’ voy a usar una letra B (claramente, podría poner la letra que quisiera). Elijo B por comodidad. Por la misma razón, puedo poner C en lugar de escribir ‘cubo’ y pongo A en lugar de ‘caracol’.

En lugar de la balanza, voy a imaginarme que tengo signos de ‘igual’, y cada platillo significará *cada lado* de la igualdad. Por lo tanto, las dos primeras pesadas podría representarlas con estas letras (y compruebe usted si se siente cómoda/o con lo que voy a escribir. Le propondría que no avance hasta que me siga):

Primera pesada:

$$A + 3C = 12B \ (*)$$

Segunda pesada:

$$A = C + 8B \ (**)$$

Después, agregué 3C a cada uno de los platillos de la segunda pesada. Lo que queda es:

$$A + 3C = 4C + 8B(***)$$

(¿Por qué 4C? Antes de agregar los 3C había ya una C).

En (*) y (***), el *lado izquierdo* de la igualdad es el mismo. Luego, los lados derechos tienen que ser los mismos también. De acá deducimos entonces que:

$$12B = 4C + 8B$$

Al *retirar 8B* de cada lado, se sigue:

$$4B = 4C$$

Y de acá:

$$B = C$$

Por último, si B = C, vayamos hasta (**) y reemplacemos la C por la B. Se tiene:

$$A = 9B$$

Y esto resuelve el problema.

Una moraleja posible es que las igualdades llevan el nombre de *ecuaciones*. ¿Es importante saber un nombre para resolver un problema? *¡No!* De ninguna manera, pero ayudan para que nos pongamos de acuerdo y sepamos de qué estamos hablando en cada caso. A los efectos del problema propiamente dicho, llamarlas *ecuaciones*, *igualdades*, *pesadas* o lo que usted quiera termina siendo irrelevante. Lo *único* que importa es la capacidad de abstraer y de pensar. Una vez que uno encuentra la solución, cualquier método que haya empleado es bueno, y no hay ninguna razón para decir que *uno* es *mejor* que otro. Una vez más, si un camino es conducente, bienvenido sea. Mientras, *resuelva el problema*…

85. Aunque parezca curioso, no es ‘enciclopedia’ sino ‘ciclopedia’. Por otro lado, no sé qué palabra usar en castellano como traducción de la inglesa ‘puzzle’, pero

intuyo que *todo el mundo entiende qué es un puzzle*. Espero no equivocarme. En cualquier caso, se trata de un 'problema para resolver', pero así escrito es demasiado ambiguo y genérico. Disculpas.

El sueño de todo alumno (que también fue el mío)

No sé cómo le habrá ido a usted en la escuela cuando se trataba de 'matemática', pero yo recuerdo un momento muy particular. Fue el día en el que nos enseñaron a 'simplificar'. ¿Le pasó lo mismo a usted?

Cuando creí haber entendido lo que significaba, pensé que había 'crecido' (matemáticamente hablando). A partir de allí, *simplificar* los factores comunes de numerador y denominador hacía las cuentas mucho más sencillas. La vida me sonreía. Encima, no había calculadoras… o mejor aun: ni siquiera sabíamos que no había lo que no había. Le pido que no *abandone* acá. Le prometo que se va a divertir.

Suponga que alguien nos pedía que dividiéramos 300 por 60. Se ponía así:

$$300/60 = 30/6 = 5$$

Puedo 'tachar' los '0' del numerador y denominador. Facilísimo. ¡Qué buen momento!

O si teníamos que dividir 486 por 12, uno descubría que numerador y denominador son múltiplos de 3. Entonces:

$486/12 = (162 \times \mathbf{3})/(4 \times \mathbf{3}) = 162/4$ (después de 'tachar' los '3')

Ahora, como 162 y 4 son pares, son múltiplos de 2. ¡Puedo seguir simplificando! ¡Fiesta!

$162/4 = (81 \times \mathbf{2})/(2 \times \mathbf{2}) = 81/2$ (después de 'tachar' los '2')

Claro, cuando uno cree que ya entendió todo lo que hace falta para llevarse el mundo por delante, viene el golpe contra la realidad.

Sígame con este ejemplo. Suponga que tiene que dividir 482 por 62. Se pone así:

$$48\mathbf{2}/6\mathbf{2} = 48/6 = 8$$

La tentación entonces es 'eliminar' al número '2' (como antes hizo con los *ceros*). Los tacha y queda 48/6 y al dividir 48 por 6 obtiene 8. Otra vez, muy fácil… pero lamentablemente, ¡ya no es más cierto! ¿Y

entonces?

Aparece algo peor: la mirada amenazante de la maestra (o el maestro) que suelta sin piedad: —¡Eso no se puede hacer!

—¿Por qué? ¿Cómo que no se puede? ¿No puedo 'tachar' arriba y abajo cuando hay dos números iguales como hicimos antes?

Y no… no se puede. O mejor dicho, en general no se puede.

Sin embargo, hay algunos casos en los que sí se puede. Son pocos y, por lo tanto, resultan ser muy curiosos. Acá van[86].

a. 64/16 = 4/1 = 4
   Aquí taché el '6' en el numerador y denominador. Eso no se puede hacer 'casi' nunca, pero en este caso sí.
b. 98/49 = 8/4 = >
   Aquí hice desaparecer al número '9'. Lo mismo que en el caso anterior: casi nunca es válido, pero acá sí (¡compruébelo usted!).
c. 95/19 = 5/1 = 5
   Esto sucedió después de eliminar los '9'. No funciona 'casi' nunca, pero acá sí.
d. 65/26 = 5/2
   Lo mismo: taché el '6' en el numerador y denominador. El resultado sigue siendo válido.

La enciclopedia digital de Stephen Wolfram afirma que esos son los únicos cuatro casos que involucran números de dos dígitos.

Si uno extiende el análisis a números de *hasta* tres dígitos, acá está la lista completa de los que también verifican la 'cancelación anómala', eliminando el (o los) dígito(s) del numerador y el denominador sin que eso *altere* el resultado correcto.

13/325 = 1/25 (eliminado el '3')
124/217 = 4/7 (eliminados el '1' y el '2')
127/762 = 1/6 (eliminados el '2' y el '7')

La lista se completa con los siguientes ejemplos:

138/184 = 3/4
139/973 = 1/7
145/435 = 1/3
148/185 = 4/5
154/253 = 14/23
161/644 = 11/44

163/326 = 1/2
166/664 = 1/4
176/275 = 16/25
182/819 = 2/9
187/286 = 17/26
187/385 = 17/35
187/748 = 1/4
199/995 = 1/5
218/981 = 2/9
266/665 = 2/5
273/728 = 3/8
275/374 = 25/34
286/385 = 26/35
316/632 = 1/2
327/872 = 3/8
364/637 = 4/7
412/721 = 4/7
436/763 = 4/7

Hasta acá, una curiosidad. Pero ahora tengo una sugerencia. ¿No sería más adecuado proponerles a los alumnos, o sea, a nosotros, que nos pusiéramos a buscar ejemplos como los anteriores, a ver si podemos encontrarlos? ¿Existirán? ¿No sería un método mejor para entender por qué *no se puede simplificar de esa forma en la mayoría de los casos*?

Está claro que hay que invertir tiempo y explorar múltiples ejemplos, pero más allá de la diversión o el entretenimiento educativo, podríamos evitar la mirada condenatoria de quien 'sabe que no se puede' pero lo transmite por la autoridad que le confiere el cargo.

¿Cuándo llegará el momento de cambiar los métodos educativos por otros que permitan *explorar y descubrir* sin que el —supuesto— conocimiento llegue de forma 'vertical'?

¿Usted qué piensa?

86. El método se conoce con el nombre de 'cancelación anómala'. Podrá encontrar una versión en inglés en mathworld.wolfram.com/AnomalousCancellation.html. Fue descripto por el grupo de matemáticos que trabajan en la extraordinaria enciclopedia digital creada por Stephen Wolfram: mathworld.wolfram.com

Último recreo.
Una curiosidad con el Rubik Cube

No querría que se termine el libro sin proponerle pensar lo siguiente: “¿Se preguntó alguna vez cuántas formas posibles hay de distribuir las ‘caras’ y los ‘cubitos’ del Rubik Cube (o Cubo Mágico)?”.

El número total de posibles configuraciones que se pueden obtener es:

43.252.003.274.489.856.000

Por supuesto, esta respuesta sin elaboración no creo que ayude, pero ¿no le despierta algún tipo de curiosidad elaborar alguna estrategia para poder *contarlas*?

Yo volveré sobre este tema en alguna otra oportunidad. Por ahora, tómelo como un ejercicio para *pensar* y *entretenerse*.

El juego con las 105 bolitas

Supongamos que hoy es su cumpleaños. Yo le regalo una caja que contiene un juego. La curiosidad invita a abrir la caja y ver qué es lo que hay adentro. Eso es —justamente— lo que usted hace.

Es muy sencillo. En la caja hay una bolsa de plástico con 105 bolitas. No hace falta que las cuente, porque el juego se llama '105'. ¿Qué hacer ahora?

Hay un papel con un "Manual de Instrucciones". Usted despliega el papel y lee:

1. Abra la bolsa con las 105 bolitas.
2. Forme con ellas tres pilas diferentes de la siguiente forma:
    - una con 49 bolitas;
    - otra con 5 bolitas;
    - la tercera con las 51 restantes.
6. Sepa que podrá hacer solo *dos* operaciones:
    a. Juntar dos pilas (con *todas* las bolitas que hay en cada una) y formar una nueva.
    b. Si una pila tiene un número *par* de bolitas, entonces la puede dividir en dos pilas que tengan *exactamente* el mismo número de bolitas.

El juego consiste en lo siguiente: usando *únicamente* las dos operaciones 'legales' o 'permitidas', ¿se puede elaborar una estrategia que permita llegar a tener 105 pilas de *una* bolita cada una?

Si se pudiera, ¿cuál es el mínimo número de pasos que hacen falta para obtener esas 105 pilas?

Si no se pudiera, ¿cuál sería la razón que usted invocaría para convencerme de que no fue que *usted* no pudo, sino que *nadie* va a poder?

Ahora es su turno.

Respuesta

Como siempre, si no invirtió algún tiempo en pensar razones para contestar que sí o que no, le propongo que no siga leyendo porque en los próximos párrafos aparecerá la respuesta. Acá voy.

Como las tres primeras pilas tienen un número *impar* de bolitas, la única operación permitida para empezar es la primera. Hay que juntar entonces dos de las tres pilas.

¿De cuántas formas las podemos combinar? Hay *tres* maneras:

a. Juntar las pilas que tienen 5 y 49. En ese caso, tenemos dos nuevas pilas. Una —nueva— de 54 bolitas y la otra, que ya existía, de 51.
b. Juntar la de 5 y 51. Ahora tendríamos dos pilas. Una de 56 bolitas y otra de 49.
c. Por último, podemos juntar las pilas de 49 y 51. En esta situación, tendríamos dos pilas: una de 100 bolitas y otra de 5.

Quiero volver escribir las dos pilas en cada caso:

a. 54 y 51
b. 56 y 49
c. 100 y 5

Al llegar a este punto, ¿qué es lo que conjetura usted que va a pasar? ¿Se podrá o no llegar a obtener 105 pilas de una bolita cada una usando *nada más* que las dos operaciones?

Mi primera apuesta fue sospechar que no se iba a poder, pero era nada más que *eso… una sospecha*. ¿Cómo convencerme?

Me quedé pensando: como solamente se pueden hacer *dos* operaciones (sumar dos pilas o dividir una pila que tenga un número 'par' de bolitas en dos pilas iguales), ¿qué propiedades podrían *heredar* las nuevas pilas que voy obteniendo? ¿Por qué escribo la palabra *heredar*? Me explico.

Fíjese que los dos números del caso (a) son múltiplos de 3. Los del caso (b) son múltiplos de 7, y los del caso (c) son múltiplos de 5.

Si uso la primera operación y sumo dos pilas que tengan una cantidad de bolitas que sean múltiplos de 3, la suma *también* será múltiplo de 3. Y lo mismo sucede con los múltiplos de 5 y de 7. En realidad, ocurre algo mucho más general: si uno tiene dos números cualesquiera que son múltiplos de n (cualquiera sea n), entonces la *suma también* es múltiplo de n.[87]

¿Y qué pasa con la *segunda* operación? En principio, para poder

aplicarla, necesito que el número de bolitas de la pila sea un número par. De acuerdo. ¿Será verdad que si divido en dos mitades iguales una pila con un número *par* de bolitas que *además* sea múltiplo de 3, las nuevas pilas 'heredarán' la propiedad de ser múltiplos de 3? ¿Y qué pasa con 5 o 7? ¿Pasará lo mismo? ¿Importará que 3, 5 y 7 sean números *primos* o alcanzará que sean *impares*?

Seguro que hace falta —por lo menos— que sean impares, porque si yo tomo el número 56, que es múltiplo de 8, al dividirlo por 2 obtengo 28, y claramente 28 ¡no es más múltiplo de 8! O sea, la propiedad de ser múltiplo de 8 *no la hereda la mitad*. ¿Por qué pasará esto?

Porque el número 8 se 'repartió' en dos partes iguales de 4 cada una. Es decir,

$$56 = 28 + 28$$

Si ahora escribo la 'misma' igualdad, pero 'mirando' lo que sucede con el 8 como *factor*:

$$56 = 7 \times 8$$
$$56 = 28 + 28 = (7 \times 4) + (7 \times 4)$$

Es decir, lo que pasa es que el 8 se 'repartió': una mitad (*cuatro*) se fue para contribuir al 'primer' 28, y la otra mitad (el otro *cuatro*) se fue con el 'segundo' 28. ¡Por eso no *hereda* la propiedad!

Para ser más precisos, en algunos casos *sí* la hereda y en otros *no*. Tome por ejemplo el número 32. Si uno tuviera 32 bolitas en una pila, al dividirla en dos pilas de 16 cada una, el número 16 *también* es múltiplo de 8.

Igualmente me quedé tranquilo: como los números 3, 5 y 7 son impares, no se van a poder 'partir' en dos. Al menos, no voy a tener *esa* particular preocupación.

Pero fíjese qué interesante lo que pasa. Tome un número X cualquiera que sea *par* y que además sea *múltiplo de 3*. Este número X lo escribo así:

$$X = 2 \times 3 \times A$$

El 2 aparece como factor porque el número X es par, mientras que el 3 aparece como factor porque el número X es múltiplo de 3. Entonces, si usted divide X por la mitad, obtiene $(3 \times A)$, que es múltiplo de 3.

O sea, si una pila tiene X bolitas (en donde X es un número par) y quiero usar la segunda operación, puedo descomponerla en dos pilas nuevas, cada una con (3 ×A) bolitas. Listo. Eso era lo que quería comprobar. Las *dos nuevas pilas heredan la propiedad de ser múltiplos de 3*. Lo mismo sucede con una pila par que sea también múltiplo de 5 o de 7.

Una vez que llegamos a este punto, creo que usted advierte hacia dónde voy. ¿No quiere seguir por su cuenta?

Ahora tenemos una *herramienta* poderosa que no conocíamos antes. No importa cuál de las operaciones usemos, si empezamos con pilas que son ambas múltiplos de 3, *todas las pilas que vayan apareciendo (por divisiones o sumas), tendrán una cantidad de bolitas que serán múltiplos de 3*. Y lo mismo si después del primer paso tenemos pilas con números de bolitas múltiplos de 5 o de 7.

Luego, como el juego pregunta si se puede elaborar una estrategia que permita llegar a tener 105 pilas de una bolita cada una, la respuesta es *¡no!* Y no se puede porque, empiece como empiece, el número 1 no es múltiplo de ningún otro número entero positivo más que de él mismo: no es múltiplo de 3, ni de 5 ni de 7.

Moraleja

Vuelva a poner las bolitas en la bolsa de plástico, tome las instrucciones que había en el papel, ponga todo adentro de la caja, ciérrela y devuelva el juego. Era muy fácil y encima se puede jugar una sola vez. ¿Usted cree que hago mal en devolverlo?

87. Si A y B son múltiplos de n, se pueden escribir así: $A = (n \times a)$ y $B = (n \times b)$. Si los sumo, tenemos: $(A + B) = (n \times a) + (n \times b) = (n \times (a + b))$, que por lo tanto resulta también múltiplo de n.

¿Dónde están los ases?

Este es un desafío interesante. Solo hay que pensar. Es por eso que en un momento imaginé que el título de esta historia iba a ser: "Lógica pura: ¿dónde están los ases?". Es un problema muy sencillo de presentar y, una vez resuelto, uno piensa: "Esto fue verdaderamente una *pavada*". De acuerdo, va a resultar una pavada, pero hay que pensarlo primero… y resolverlo. Acá va.

Suponga que yo tengo tres cartas. Dos de ellas son ases, y la tercera, un rey. No importa el palo, lo único que interesa es que haya dos iguales y una distinta. Yo las voy a dar vuelta y, por lo tanto, resultarán indistinguibles. Las ordeno en fila.

El objetivo es que usted sea capaz de determinar *con certeza* dónde está ubicado uno de los ases. Estas son las reglas.

1. Yo voy a ser la persona que distribuya las tres cartas. Por lo tanto, seguro que *yo* voy a saber el lugar en donde estarán ubicados los ases.
2. Usted podrá hacerme solamente una pregunta.
3. A esa pregunta yo podré contestarla con un 'sí' o con un 'no'. Nada más.
4. En el momento en el que usted me formule la pregunta, tendrá que apoyar un dedo en una de las tres cartas.
5. Si la carta que usted eligió para poner su dedo es uno de los dos ases, yo voy a contestar su pregunta diciendo la verdad.
6. Si la carta que usted eligió para poner su dedo es el rey, entonces mi respuesta puede ser verdadera o falsa, sin que usted tenga manera de saberlo de antemano.

Bien, esas son las restricciones. ¿Qué pregunta me haría para determinar *con certeza* dónde está ubicado uno de los dos ases?

Yo sé que hay muchas preguntas que resuelven el problema. Por lo tanto, si cree que encontró una de ellas, lo que yo escriba acá no debería modificar lo que usted pensó. Si *su* pregunta funciona y le permite detectar uno de los ases, no hay nada más que decir. Si

quiere, puede comparar con la que voy a proponer yo, porque no es que haya *una pregunta mejor y otra peor*. Si la pregunta resuelve el problema, listo.

Ahora bien, esta es mi propuesta: como las tres cartas están ubicadas en una fila, hay una de ellas que está en el medio. Usted apoya un dedo en la carta del medio y me pregunta: "¿La carta que queda a mi izquierda es un as?".

Fíjese ahora si usted, con esta pregunta y con mi respuesta, estaría en condiciones de poder determinar con certeza dónde está uno de los ases.

Sigo yo. Le voy a mostrar qué podría hacer usted.

Primer caso

Supongamos que yo le contesto que *sí*. Puede que en el medio haya un as o no.

Si en el medio había un as, entonces, usted ya sabe que mi respuesta tiene que ser verdadera y, por lo tanto, eso le sirve para determinar que a su izquierda hay un as.

Si en el medio hubiera un rey, entonces usted no sabe si mi respuesta es verdadera o falsa, pero… *¿por qué habría de importarle?* En definitiva, si el rey está en el medio, eso significa que los dos ases están ubicados a cada uno de los dos costados. Por lo tanto, no se puede equivocar: elija la carta que está a su izquierda y allí encontrará un as. Y listo.

Moraleja (parcial): si yo le contesté que 'sí', no importa si en el medio hay un rey o un as, usted descubre con certeza que, si da vuelta la carta de la izquierda, allí *tiene* que estar uno de los ases.

Segundo caso

¿Qué pasaría si yo le contestara *no*? Igual que antes, puede que en el medio haya un as… o no. Veamos juntos que si usted elige la carta de la derecha, allí tiene que haber un *as* seguro. ¿Por qué?

Si la carta del medio es un as, yo le habría contestado la verdad al decirle que 'no'. Luego, la carta de la izquierda *no es un as* y, por lo tanto, la de la derecha *sí tiene que serlo*.

Si la carta del medio es un rey, usted no sabe si yo le estoy contestando la verdad cuando le dije que 'no'. Una vez más, ¿por qué habría de importarle? Como yo le dije que 'no', usted vaya a la carta que queda a su derecha y no tiene manera de errar porque a los dos costados *tiene que haber ases*.

Moraleja final: si yo digo que ‘sí’, usted tiene que elegir la carta de la izquierda y seguro que allí hay un as. Si yo le dije que ‘no’, entonces elija la carta de la derecha, y tampoco le va a errar: allí *tiene* que haber un as.

En definitiva, con esa pregunta y apuntando a la carta del medio, *seguro* que encuentra un as. Y listo.

¿Es la única pregunta que lleva a la solución? *¡Seguro que no!* De hecho, usted podría haber apuntado a la carta de la izquierda (por ejemplo) y preguntarme si en la carta del medio hay un as, y fíjese que esa pregunta *también* lo conduce a la solución. Como usted ve, hay muchas alternativas.

Ya se lo dije antes: ahora el problema parece una *pavada*. ¿No es lo que pasa *siempre* cuando uno ya conoce la solución?

La historia de mis ‘triunfos’ con María Marta

Un desafío. No, no me malinterprete: no es un desafío que yo le quiero hacer. Le quiero contar una historia que *involucra* un desafío. Me explico.

Hace unos días, estaba reunido con María Marta García Scarano, la productora general de *Alterados por Pi*, y le propuse un juego que después trataría de replicarlo con estudiantes de las distintas escuelas públicas del país.

Le pedí entonces que consiguiéramos cuatro ‘cubitos’, como si fueran ‘dados’, pero de manera tal que cada cubo fuera de un color distinto y que tuviera las seis caras ‘en blanco’, es decir, sin que hubiera nada escrito en ellas.

A la media hora, ya teníamos los cubitos encima de la mesa. Por el momento, para poder distinguirlos, los llamamos A, B, C y D.

Le dije entonces que yo habría de numerar las caras de cada uno de ellos, pero *no* de forma convencional, sino que habría de usar números naturales con dos particularidades:

a. Los números que aparecerían en cada cara *no tendrían por qué estar entre 1 y 6, sino que podría elegir cualquier* número natural. Por ejemplo, un dado cualquiera podría tener estos seis números en sus caras: (7, 103, 215, 72, 1.450 y 2).
b. También se permitirían repeticiones en las caras. Por ejemplo, uno de los dados podría tener estas seis caras: (9, 9, 9, 9, 145 y 145).

Al principio se mostró un poco sorprendida, al ratito quedó todo claro: parecen dados convencionales, pero no lo son. Una vez que nos pusimos de acuerdo con estas nuevas *reglas*, le dije que le habría de proponer un juego, que también le propongo a usted.

Yo habría de numerar los cuatro dados cumpliendo con las especificaciones que expliqué antes. Una vez que tuviéramos los dados, ella elegiría *primero* un dado cualquiera. Después, yo elegiría uno entre los tres restantes.

El juego es así. Empieza María Marta tirando su dado. Después me

toca a mí. Si ella saca un número mayor que el mío, gana ella y se anota un punto. Si no, gano yo, y el punto viene para mí. Como se verá, por la distribución de los números que voy a hacer, *no hay posibilidades de empate.*

Aceptadas las condiciones, empezamos a jugar. Para su sorpresa, a medida que tirábamos los dados más veces, mi puntaje empezaba a ser mayor que el de ella, y cada vez de forma más evidente. No significa que yo ganaba siempre, pero sí que, al acumular tiradas, yo me empezaba a distanciar en el marcador.

Pasados unos minutos, me pidió si podíamos empezar de nuevo, quería cambiar el dado que había elegido. Por supuesto, acepté. Una vez que ella tenía su *nuevo* dado, yo elegí uno de los otros tres… y seguimos jugando.

Después de otros diez minutos, y viendo que sucedía lo mismo, me propuso parar y empezar nuevamente, pero esta vez María Marta quería elegir *otro de los dados que no había elegido antes*.

Supongo que no hace falta que escriba que, aun así, con el tercer dado (y después con el cuarto) yo volví a ganar, y de forma consistente.

Una vez más, *y esto es muy importante de observar*, yo no le ganaba *todas* las tiradas. Hubo momentos en que ganaba María Marta, pero lo notable es que, al ir acumulando más y más tiros, era evidente que yo había elegido un dado *mejor que el que tenía ella*.

Naturalmente, lo impactante es que, a medida que ella cambiaba de dado, parecía que tenía el *dado ganador… ¡pero eso nunca sucedía!*

Pregunta: ¿quiere proponerse pensar *cómo* numerar los cuatro dados para que suceda lo que acabo de describir?

Como verá, *no* hay una *única* forma de numerar los cuatro dados. De hecho hay *infinitas maneras* de hacerlo. ¿Quiere pensar al menos *una* de ellas?

Una solución posible

Como siempre, mi aspiración es que usted haya intentado por su cuenta. Si lo que está a punto de hacer (leer una *potencial* solución) es la culminación de un proceso en donde usted no pudo encontrar lo que buscaba, todo bien. Pero si no se dio a usted misma/o la oportunidad de pensar nada, ¿qué gracia tendría? Más aún: le preguntaría (si estuviéramos juntos) ¿dónde cree usted que está la *mayor dificultad*? O mejor aun, *¿cuál es la dificultad?*

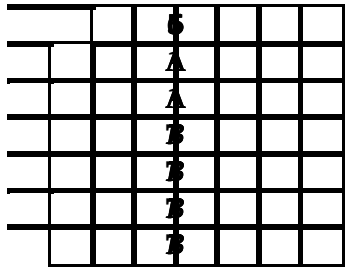
Sigo yo.

Una distribución posible es la siguiente:

Dado A = (5, 5, 5, 6, 6, 6)
Dado B = (1, 1, 7, 7, 7, 7)
Dado C = (3, 3, 3, 8, 8, 8)
Dado D = (4, 4, 4, 4, 10, 10)

Le propondría que usted verificara que estos cuatro dados *proveen* la solución que buscábamos. ¿Por qué?

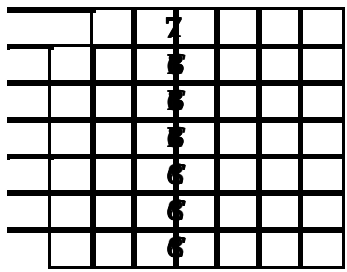
Fíjese en la *grilla* siguiente, en la que voy a ubicar las seis caras de cada uno de los dados, el A y el B. En la primera fila, figuran los números de las caras del dado A, y en la primera columna, los números que están en las caras del lado B.



Como usted ve, de las 36 formas de combinar las seis caras de A con las seis caras de B, el dado B gana en 24, o sea en dos de cada tres casos.

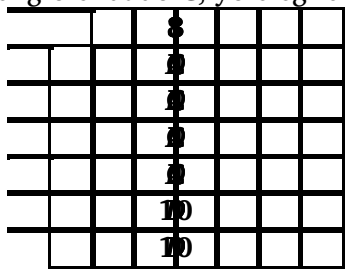
Un paso más. ¿Qué sucedió cuando María Marta (usted) eligió el dado B? Ella pensó que ahora tenía el dado 'ganador'.

Sin embargo, cuando yo tenía el dado B, ella tenía el dado A. Yo sabía que ese era un dado *que yo no tenía que elegir*, y por eso elegí el C. Mire lo que sucedió.

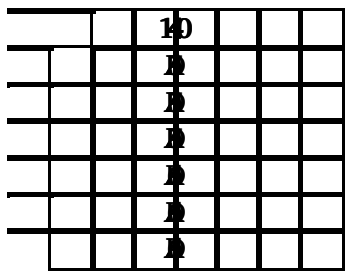


Una vez más, el dado C resulta ganador en 24 de las 36 combinaciones posibles.

Creo que ahora usted ya descubrió qué es lo que sucede. Cuando María Marta eligió el dado C, yo elegí el D y pasó esto:



Otra vez, el dado D le gana al dado C en 24 de las 36 oportunidades. Por último, cuando ella eligió el dado D, yo elegí el dado A y, como usted imagina, volvió a pasar lo mismo.



Reflexiones

a. Creo que queda claro que usted podría fabricarse *sus propios dados y lograr que pase lo mismo*. Más aún: a esta altura usted entiende por qué escribí antes que hay *infinitas* formas de numerar las caras de manera tal que los resultados sean los que buscábamos.
b. Estos ejemplos ponen 'a prueba' una noción que los humanos adquirimos en el colegio y que no siempre es cierta: la *transitividad*. Es decir, uno supone que si A le gana a B y B le gana a C, entonces A *tiene que ganarle a C*. Bueno, eso no siempre así. Es una propiedad que *hay que verificar si se cumple o no*. Por ejemplo, la *hermandad* es una propiedad transitiva: decir que A es hermano de B y B hermano de C permite concluir que A es hermano de C. Por otro lado, la *paternidad* no lo es: que A

sea el padre de B y B sea el padre de C *no implica* que A sea el padre de C. Y los ejemplos siguen.

c. En el caso que presenté antes, fíjese que el dado B le gana al dado A, el dado C le gana al dado B, el dado D le gana al dado C y al final, y casi *misteriosamente*, ¡el dado A le gana al dado C!
d. Por último, todos estos juegos forman parte de 'hacer matemática' y de aprender a pensar 'jugando'. No es menor. ¿Por qué no lo hacemos en las escuelas?

Una última invitación a pensar: ¿Se podrá hacer con un número diferente de dados? Es decir, ¿se podrá hacer con tres dados? ¿Y con cinco o más? Esta parte se la dejo a usted.

El reloj de Fibonacci

Dentro de poco se van a cumplir quince años de una charla que fue una de las más concurridas de la historia de *nuestra* facultad, Exactas (UBA). Se desarrolló en el aula magna del pabellón dos y participamos todos: estudiantes de las carreras que se cursan allí y también profesores de los departamentos de Matemática, Física, Ciencias de la Computación, Química, Geología, Biología y seguramente me olvido de algunos. Había gente sentada en los pasillos, otros participaron de pie en lugares desde donde se podía escuchar pero no se podían ver los pizarrones… algo así como un sueño. El tema fue "La sucesión de Fibonacci[88] y el Número de Oro". La duración habitual de una charla de divulgación de estas características es alrededor de una hora, pero esa vez estuvimos allí más de cuatro horas y terminamos solo porque había que apagar la luz y los colectivos ya no habrían de llegar más hasta Ciudad Universitaria. Fue un momento maravilloso y, en alguna oportunidad, voy a tratar de escribir un resumen de lo que allí se dijo, tarea ciertamente imposible si pretendo que sea exhaustiva. Pero para variar… me desvié.

En busca de aplicaciones más actuales de la sucesión de Fibonacci, me tropecé con la página web[89] de un diseñador canadiense, Philippe Chrétien. Llegué hasta allí porque Philippe está (o estaba) tratando de juntar fondos para lanzar una compañía que le permitiera producir —en serie— un reloj que él llamó 'El reloj de Fibonacci'. Eso solo ya me invitó a ver el video en el que muestra cómo lo construye[90], pero me tenía confundido que no podía deducir cómo funcionaba el reloj. Es decir: todo muy interesante, diseño, estética, colores, hasta el 'nombre', pero para que se llame *reloj*, al menos por ahora, hace falta que 'marque la hora', ¿no?

Cuando finalmente comprendí lo que hacía, me pareció que sería interesante compartirlo. Esa es la historia que quiero contar acá.

Empiece por la figura 1. La foto que usted ve es el resultado final, el reloj *ya terminado*.

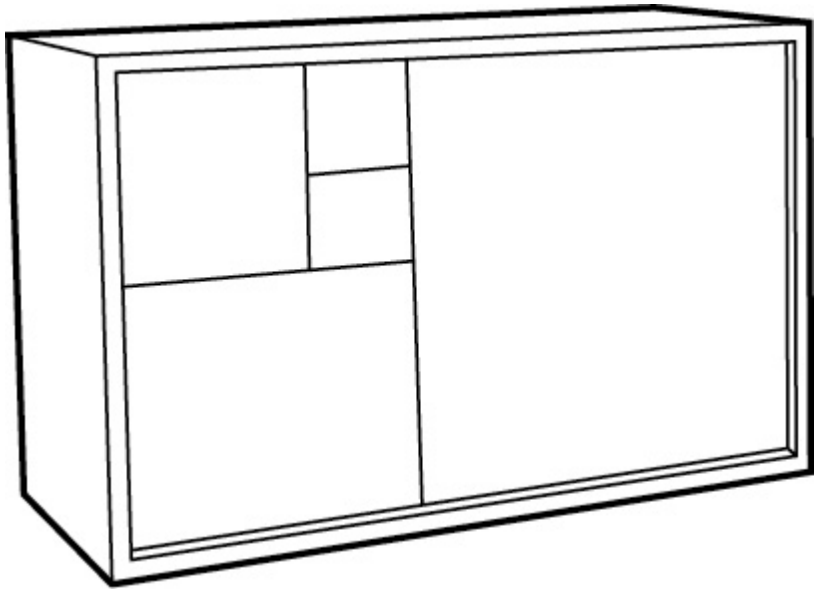


Figura 1

Si le presta atención al diseño verá que hay cinco cuadrados. El más grande (en área) es el que está apoyado sobre la derecha del rectángulo y mide (5 × 5). El segundo más grande está apoyado en la base y mide (3 × 3). Luego, hay uno un poco más chico que mide (2 × 2), y dos cuadraditos iguales cuyas dimensiones son (1 × 1), como se ve en la figura 2.

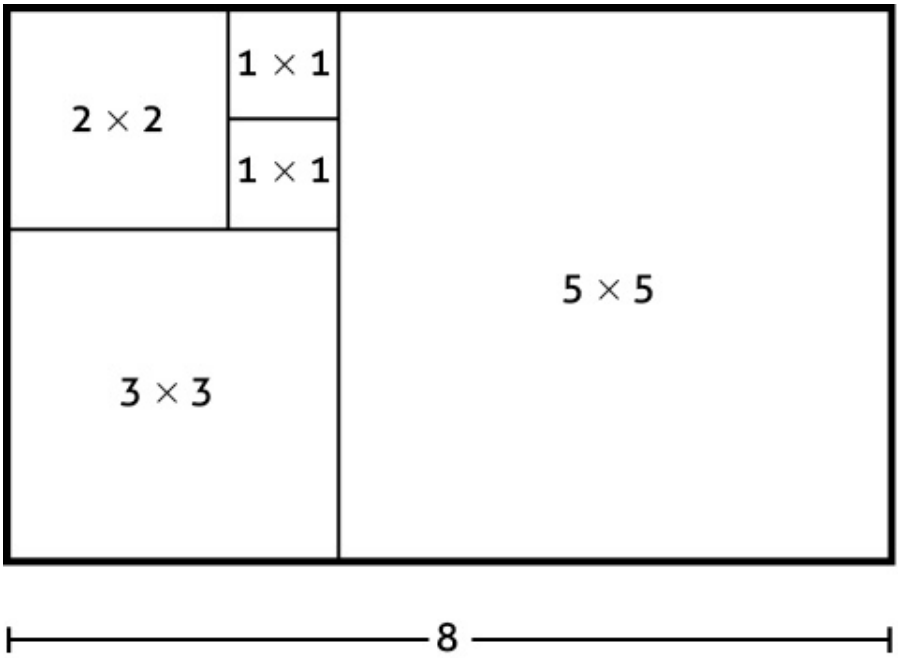


Figura 2

Acá aparece el primer dato interesante: tanto los lados de los cuadrados como los de la caja se corresponden con los primeros números de la sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5 y 8. Los cinco primeros coinciden con los lados de los cuadrados. Por otra parte, tanto la base del rectángulo (ocho) como su altura (cinco) son también números de la misma sucesión. No incluyo la profundidad de la caja, primero porque no la sé, y segundo porque no participa en 'comunicar' la hora.

Ahora, le pido que me tenga un poco de paciencia y verá que todo comienza a tener sentido.

La pregunta que todavía sigue sin contestar es: ¿cómo hace esta caja rectangular con los cuadrados incluidos para marcar la hora?

Empecemos por acá. Le voy a mostrar cómo se pueden 'generar' *todos* los números que van desde el 1 hasta el 12. Para eso, voy a elegir algunos de esos cinco números (1, 1, 2, 3, 5) y los voy a sumar. Fíjese en esta lista:

1 = 1
2 = 2
3 = 3
4 = 3 + 1
5 = 5

$6 = 5 + 1$
$7 = 5 + 2$
$8 = 5 + 3$
$9 = 5 + 3 + 1$
$10 = 5 + 3 + 2$
$11 = 5 + 3 + 2 + 1$
$12 = 5 + 3 + 2 + 1 + 1$

Ahora bien: ¿cómo hace 'la caja' para marcar —por ejemplo— la *hora seis*? Observe la figura 3. Allí pinté de negro el cuadrado de (5×5) y también uno de los dos cuadraditos de (1×1). Al sumarlos ($5 + 1$) se obtiene el número de horas que estaba buscando[91].

Figura 3

Otro ejemplo. Fíjese en la figura 4. Los dos cuadrados que aparecen pintados de negro son el de (3×3) y el de (1×1). Por lo tanto, *la hora* que marca el reloj en este caso se obtiene sumando ($3 + 1$), o sea que son las *cuatro*.

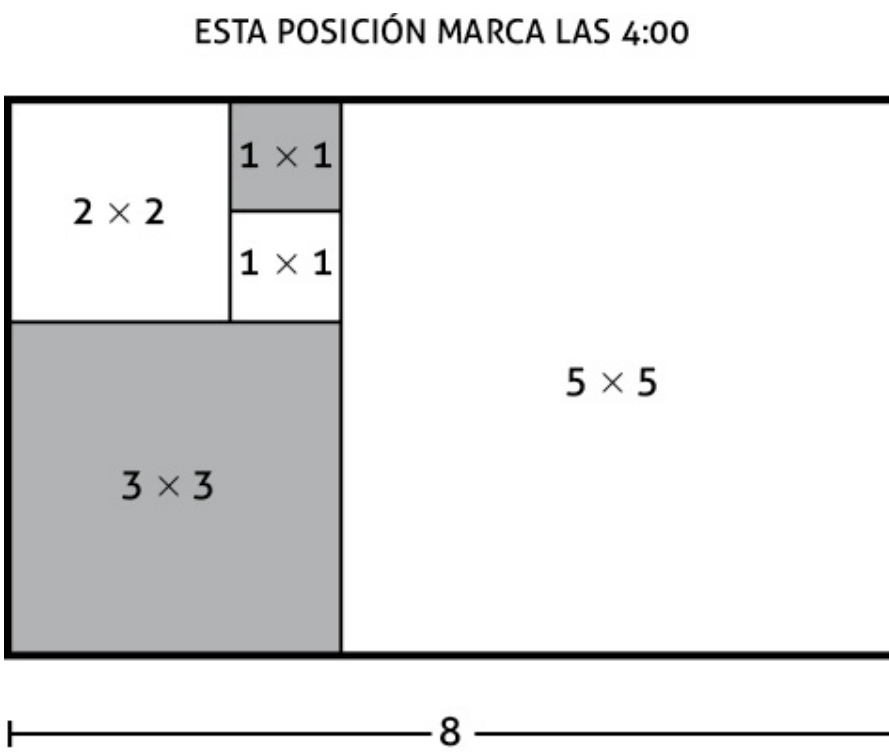


Figura 4

Una observación que quizás debí haber hecho antes: cada vez que un cuadrado aparezca en blanco (sin pintar) significará que no aporta nada para las horas, y después se verá que *tampoco agrega nada* a los minutos.

Hablando de minutos, quiero mostrar cómo hace el reloj para indicarlos. Cuando vi la caja por primera vez, me tenía confundido lo siguiente: si uno tiene a su disposición *nada más* que los cuadrados marcados en el reloj, ¿cómo hace ahora para conseguir, con distintas sumas, *todos* los números que van desde el 1 hasta el 59?

Bueno, ¡no se puede! Y acá es donde Chrétien tuvo otra idea: decidió que el reloj solamente va a marcar los minutos en múltiplos de a *cinco*. Lo escribo de nuevo: el reloj no va a marcar minuto por minuto, sino que va a dar 'saltos' de cinco minutos cada vez. Por ejemplo, uno *no* podrá indicar las 7:32.

El reloj llegará hasta las 7:30 y se mantendrá allí hasta que sean las 7:35. En ese momento *sí* producirá un cambio perceptible, pero en el medio, entre 7:30 y 7:35, la caja estará todo el tiempo *estacionada* en 7:30. De alguna manera, el precio a pagar para hacer un reloj de estas características es que uno se pierde la precisión del 'minuto a minuto'.

“No importa”, pensé, “¿quién necesita de todas formas *tanta* precisión?”. Y seguí.

Paso a contestar la *otra* pregunta. ¿Cómo hacer para que los mismos cuadrados que indicaban las horas indiquen los minutos? Una ventaja para Philippe es que él puede disponer de colores y yo no. O sea, él pinta de diferentes colores los cuadrados de las horas y los de los minutos. Como yo no tengo colores, lo que voy a hacer es ‘rayarlos de forma vertical’. Fíjese en la figura 5: aparecen ‘rayados’ dos cuadrados: el de (2 × 2) y el de (5 × 5). ¿Significa que el reloj marca siete minutos, como hacía con las horas? No. Lo que pensó Chrétien es volver a sumar las longitudes de un lado de cada cuadrado involucrado, pero al resultado —*y esta modificación es una ‘gran idea’*— lo multiplica por *cinco*.

Figura 5

En la figura 5, como la suma es de (2 + 5) = 7, al multiplicarlo por *cinco* se obtiene 35. Es decir, si los dos únicos cuadrados que aparecen con algún color en el reloj son los dos rayados de (5 × 5) y de (2 × 2), entonces el reloj está marcando 35 minutos.

Ahora, en la figura 6 dibujé una combinación de ambos 'colores' (aunque para mí/nosotros se trata de cuadrados pintados o bien de negro o bien rayados de forma vertical). Por un lado, están pintados de negro el de (3 × 3) y uno de los cuadrados de (1 × 1). Por el otro, están rayados los cuadrados de (2 × 2) y el de (5 × 5). ¿No quiere pensar usted qué hora está marcando el reloj en ese momento?

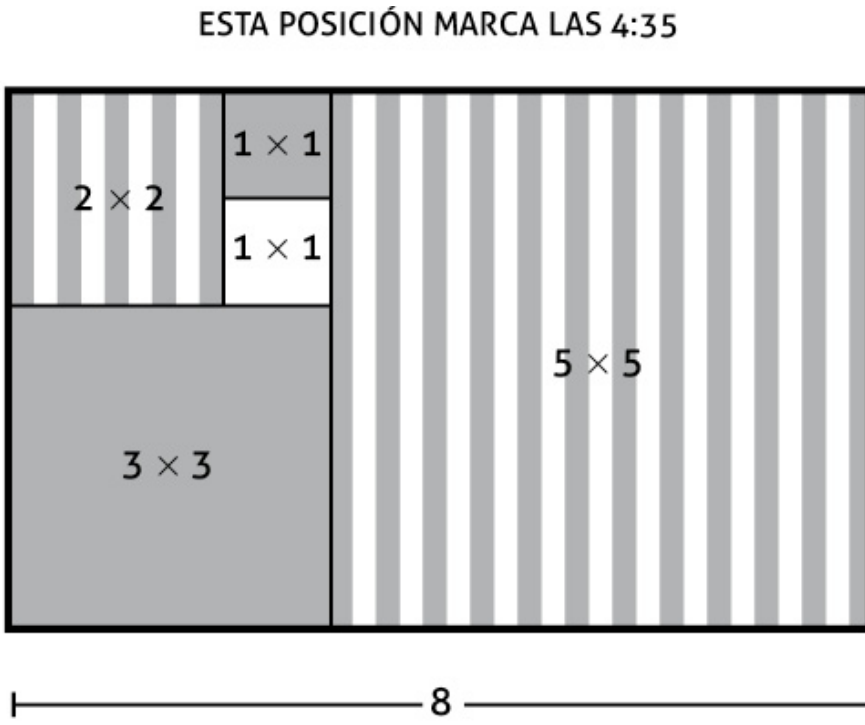


Figura 6

Sigo yo: para las horas, hay que sumar (3 + 1) = 4. Para los minutos, hay que sumar (2 + 5) = 7 y multiplicar por *cinco*, y se obtiene el número 35. En definitiva el reloj marca ahora las 4:35.

Si me siguió hasta acá, supongo que a esta altura usted debe estar pensando: ¿cómo hago si necesito usar algún cuadrado tanto para las horas como para los minutos?

Por ejemplo, si en el caso anterior, en lugar de marcar las 4:35 yo necesitara marcar las 9:35, ¿qué habría que hacer? Habría que utilizar el cuadrado de (5 × 5) tanto para las horas como para los minutos. ¿Y entonces?

Antes de avanzar con la respuesta que encontró Chrétien, le propongo que piense qué haría usted. En definitiva, todo este artículo

tiene ese objetivo: buscar dónde están las ideas.

Aunque parezca una trivialidad, creo que no lo es. Lo que hace el reloj es usar un color diferente que el que ya usó para las horas y minutos, es decir *un tercer* color. Usó uno que aporta solamente para las horas, otro color que sirve para indicar los minutos y finalmente *un tercer color*, de manera tal que, cada vez que aparezca un cuadrado pintado con este nuevo color, *aportará tanto para las horas como para los minutos*.

Como yo sigo sin poder usar colores, cuando quiera que un determinado cuadrado participe *tanto en las horas como en los minutos,* voy a pintarlo 'con puntitos', como se ve en la figura 7.

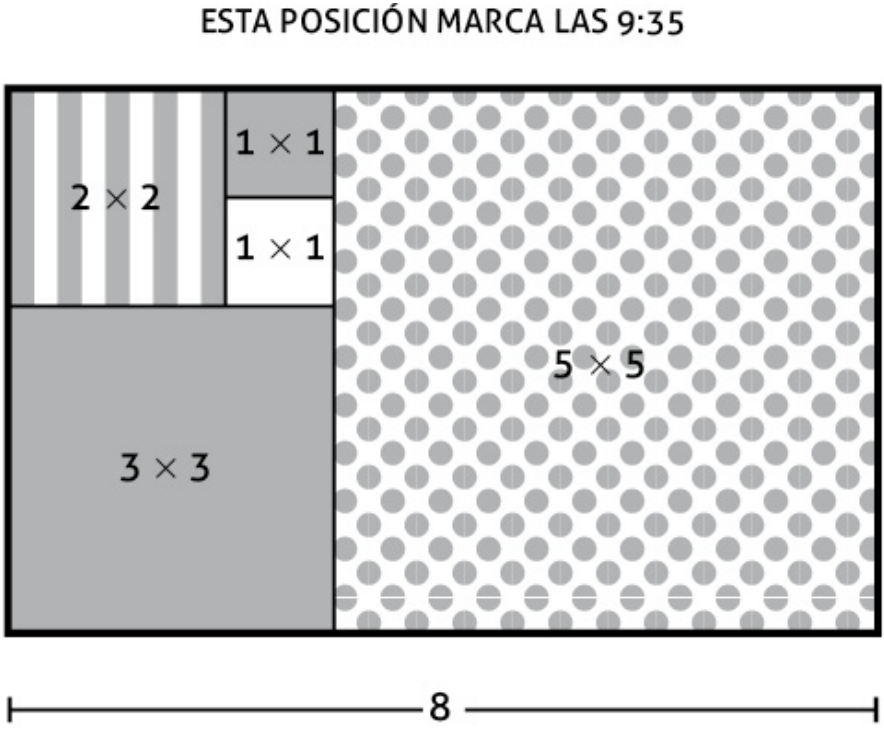


Figura 7

Permítame sugerirle algo: compare la figura 6 con la figura 7. La *única* diferencia es que el cuadrado de (5 × 5) ahora aparece 'punteado'. El resto sigue todo igual. Luego, el cuadrado de (5 × 5) aportará un *cinco* tanto a las horas como a los minutos.

Calculemos las horas y los minutos por separado. Para las horas, en principio aparecen pintados de negro los cuadrados de (3 × 3) y (1 × 1). Estos dos cuadrados ya indican que son las *cuatro*. Sin embargo,

como *también* interviene el cuadrado de (5 × 5), porque ahora aparece 'punteado', entonces hay que sumar un *cinco* a las *cuatro* que había antes. Moraleja: el reloj *marca* que las horas son *nueve,* ya que (4 + 5) = 9.

Para los minutos hago lo mismo. El único cuadrado que aparece *rayado* es el de (2 × 2). Pero como el de (5 × 5) está 'punteado', entonces tengo que sumar (2 + 5) = 7, y luego multiplicar por *cinco*. En consecuencia, ahora hay 35 minutos. La hora que marca el reloj de Fibonacci con ese diseño se corresponde con las 9:35. Si usted observa lo que hice, el número de minutos no se modifica entre las figuras 6 y 7, ya que, si bien ahora aparece rayado *solamente* el cuadrado de (2 × 2), al estar 'punteado' el de (5 × 5) sigue aportando el número *cinco* para calcular los minutos.

En definitiva, la hora que indica la figura 7 es las 9:35.

Para terminar, me imagino que usted se debe de estar preguntando: ¿quién —en su sano juicio— habría de hacer este tipo de ejercicio que solo conduce a saber la hora?

Respuesta: posiblemente nadie, sobre todo si está apurado por conocerla. Pero lo que es innegable es que esta idea de Chrétien[92] transformó un acto rutinario y aburrido en excitante y entretenido.

Apéndice: la sucesión de Fibonacci

La sucesión de Fibonacci se construye así. Los dos primeros términos son *dos números uno*. Es decir:

1, 1

A partir de ahora, verá cómo con estos dos números uno se *fabrica* todos los que siguen. El tercer número de la sucesión se calcula *sumando* los dos últimos. Usted debe estar pensando: "¿Cómo los dos últimos, si solamente tenemos los dos primeros?". Es verdad, pero estos dos números *uno* son los dos primeros pero también los dos últimos.

Como (1 + 1) = 2, entonces el siguiente número de la sucesión es *dos*. Ahora tenemos *tres números*:

1, 1, 2

Para calcular el que sigue, hago lo mismo, es decir *sumo los dos últimos*. Como (1 + 2) = 3, el siguiente término es un *tres.* Se tiene:

1, 1, 2, 3

Y así sigo. Una vez más, el próximo aparecerá al sumar los dos últimos. Por lo tanto, será: (2 + 3) = 5.

1, 1, 2, 3, 5

Como usted advierte, *todo* lo que uno tiene que hacer en cada paso es *sumar los dos últimos números y seguir indefinidamente*.

Los primeros términos son:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144…

y así podría continuar indefinidamente.

Esta sucesión tan inocente aparece de forma visible o intangible en muchísimos lugares de nuestras vidas. No es este el lugar para que me extienda sobre ella, pero su presencia es fascinante porque emerge inesperadamente en lugares insólitos. Hay muchísima literatura escrita al respecto y, si le interesa, ponga en *cualquier* buscador el nombre Fibonacci. No le alcanzará el tiempo que le queda de vida para leer *todo* lo que ya hay escrito.

88. Si le interesa la sucesión de Fibonacci y la *enorme* cantidad de material que aparece de forma sistemática, no deje de consultar la revista de matemática *The Fibonacci Quarterly*. La publica la asociación que lleva a Fibonacci como nombre (*The Fibonacci Association*) y es de periodicidad ¡trimestral! desde 1963. Los artículos son espectaculares, rigurosos, y presentados de forma hiperatractiva. Mientras escribo estas líneas, me siento como un locutor que está *vendiendo un producto*. No es así: no me pagan para difundirlo, sino que es una obligación.

89. basbrun.com

90. Si puede, véalo, porque está muy bien producido.

91. Para ser técnicamente correcto, tendría que decir que lo que uno hace es fijarse en todos los cuadraditos que aparecen pintados de negro. Se fija en la longitud del lado de cada uno de ellos y después *suma* todos esos números. El resultado es el número de *horas*.

92. El 'verdadero' reloj de Philippe Chrétien aparece en la figura 1. Es obvio que mi intención no es 'vender' ningún tipo de mercadería, pero la página web en la que figuran todos los datos es www.kickstarter.com/projects/basbrun/fibonacci-clock-an-open-source-clock-for-nerds-wit/posts/1224809

Prejuicios

La revista *Science* aparece una vez por semana. Contiene artículos de múltiples disciplinas y permite tener una visión panorámica de lo que está ocurriendo en la frontera del conocimiento. En su edición del 14 de abril de este año[93], apareció publicado un trabajo —en principio— inocente. Sin embargo, por razones que usted verá si sigue leyendo, podría tener un impacto *brutal* en un futuro no muy lejano. Créame, a esta altura, me parece que debí haber puesto *presente* en lugar de *futuro no muy lejano*, pero en algún sentido me estoy protegiendo. El artículo advierte sobre la extrapolación de algunos de nuestros prejuicios a los programas que funcionan en computadoras, teléfonos, tabletas, etcétera.

Me imagino su cara, como si me estuviera preguntando: "¿Qué? ¿De qué habla?". Téngame un poco de paciencia y verá cómo todo cierra al final… o al menos eso espero. En principio, quiero narrar algunas historias que parecen desvinculadas. La conexión la hacemos —juntos— al final. Acá voy.

Primera parte

Los seres humanos, con mayor o menor nivel de conciencia, tenemos una alta capacidad para 'segregar'. Cuando nos descubrimos en 'falta', el monitor ético que —supongo— cada uno tiene instalado con diferentes grados de eficiencia se pone en funcionamiento. Si detecta una 'falla' en nuestro comportamiento, o lo que considera que es una 'falla', se activa, interviene y corrige.

Hay un ejemplo muy conocido que habla de un padre que va con su hijo de ocho años manejando y tienen un accidente en la ruta que termina con la muerte instantánea del adulto. El niño es trasladado a una clínica local y requiere de una atención que los médicos del lugar no están en condiciones de dar. Como no lo pueden trasladar, se comunican con el Hospital de Niños de la ciudad importante más próxima e invitan a una eminencia que trabaja allí para que los visite en el sanatorio del pueblo. Cuando llega y le presentan el caso, le

preguntan si está en condiciones de hacerse cargo de la criatura. Quien llegó desde la 'gran ciudad' contesta: "¿Cómo no lo voy a atender si es mi hijo?".

Aquí permítame sugerirle que no avance con *este* texto hasta no leer la nota completa y resolver el test[94]. Hágalo y después vuelva a este artículo. Si sigue leyendo, se perderá de poder ponerse a prueba. Créame que 'vale la pena'.

Por otro lado, si usted ya sabe de qué estoy hablando, estoy 'casi' seguro de que le pasó algo muy curioso. De hecho, si yo le preguntara: ¿puede una mujer ser una *eminencia*?, es muy posible que nunca llegue a contestarme porque no podría entender que 'quepa' ese tipo de cuestionamiento. Lo mismo sucedería al revés, si la pregunta fuera: ¿puede una eminencia ser *una mujer*?

Si yo voy 'de frente' y le pregunto, usted lo entendería (o debería entenderlo) como un insulto… ¡y tendría toda la razón del mundo!

Sin embargo, cuando yo entro 'por la puerta de atrás', por un lugar donde usted no me está esperando, y la/lo sorprendo con la guardia baja, ahí sí se disparan con tranquilidad los prejuicios que tenemos embebidos en nuestro ser. Al no haber un 'filtro' al que estamos acostumbrados, aparecen en la superficie todas las deformaciones de la cultura: uno queda expuesto en un estado de indefensión, desnudo y vulnerable. Incómodo y molesto, no necesariamente con el 'otro', sino con uno mismo.

La Universidad de Harvard, en Massachusetts, Estados Unidos, hizo una serie de estudios interactivos que se pueden encontrar en internet[95]. Lleva el nombre de "Project Implicit" ("Proyecto Implícito"). Si me permite *otra* sugerencia, participe de alguno de ellos. Le servirá para 'descubrir' cosas de usted que muy posiblemente ignore.

El estudio está dividido en varios capítulos, y la idea es detectar y describir nuestras 'segregaciones', ya sea ante personas de distinto color de piel, género, nacionalidad u orientación sexual. En realidad, es muchísimo más amplio, pero creo que esos ejemplos son suficientes. La idea entonces es aprovechar de este tipo de tests para aprender un poco más sobre cómo somos, cómo pensamos, cómo sentimos, cómo prejuzgamos, cómo juzgamos, cómo segregamos, cómo preferimos… y sirve para poder exhibir(nos) como somos. En el camino, expone lo que nos queda más natural y casi 'instintivo' con lo que está aprendido y, eventualmente, deformado por la propia cultura en la que uno se desarrolla.

La ventaja que tiene este tipo de procesos es que la evaluación es 'fáctica', no es *opinable*. Como hice antes con el ejemplo de la

‘eminencia’, si yo ahora le preguntara de forma directa: “¿Usted es *racista*?”, supongo que la abrumadora mayoría (y mientras tipeo estas líneas me preocupa no poder poner que el cien por cien de las personas) contestarían que ¡no! Pero cuando uno/a está solo/a y dispuesto a enfrentarse con preguntas a las que no está acostumbrado y a contestar honestamente, descubre que no somos *exactamente lo que creemos ser*: somos mucho más racistas de lo que nos damos cuenta o *nos queremos* dar cuenta.

Justamente, los resultados de los estudios de Harvard sirven para mostrar las desviaciones, las tendencias, las segregaciones, los prejuicios, etc., que *todos* tenemos.

Un ejemplo del que participé. La pantalla de mi computadora aparece dividida en dos, de forma vertical. El programa me advierte que irán apareciendo palabras asociadas con algo *placentero*: felicidad, paraíso, belleza, festival, crepúsculo, playas, montañas… Otras tendrán la connotación opuesta: infierno, desastre, fealdad, pútrido, insectos, terror, peligro… Después, me ofrece recortes de ‘caras’. Algunas corresponderán a personas de tez blanca y otras serán de tez negra. Además, hay una serie de palabras como ‘yo, mío, mi grupo’ y otras como ‘ellos, ustedes, ese grupo, el otro grupo’.

Una vez establecidas las reglas, comienzan las asociaciones. Al finalizar, no solo están medidas mis ‘preferencias’ o ‘desvíos’, sino también el *tiempo* que tardé en elegir. Es decir, les fue posible determinar cuánto me ‘sale natural y más instintivo’ que lo que ‘tengo que pensar’.

Por más protegido y preparado que creí que estaba, igualmente aparecieron mis desviaciones y mis prejuicios. Son brutales porque están *medidos* por parámetros en los que no intervienen personas. El resultado *no miente*. Una vez más, si tiene tiempo, no deje de hacerlo.

No pretendo enfatizar *este* experimento en particular porque no soy un experto en sociología (ni mucho menos), pero lo que *sí* me quedó claro es que fue una buena manera de descubrir y exponer mis propios prejuicios.

Segunda parte

Históricamente, las computadoras se programaban dándoles instrucciones ‘paso por paso’. “Haga tal cosa”. Después, “haga tal otra”. “Si llegó a tal lugar, pare”. “Si no, de un paso más”. “Evalúe de nuevo: ¿llegó?”. “Si la respuesta es sí, deténgase”. “Si la respuesta es no, dé un paso más”. Todo bien estructurado y elaborado.

Pero eso era *antes*. Ahora no. Por ejemplo, si usted quiere enseñarle

a un robot a cruzar la calle, los avances en 'inteligencia artificial' le permiten hacer lo siguiente: usted alimenta el programa con un millón de casos en los que una persona cruza *bien*. Le muestra entonces cómo cruzar cuando le alcanzó el tiempo para ir de una vereda a la otra. Por otro lado, le incorpora otro millón de casos en los que una persona cruza *mal*: o bien es atropellada, o bien tiene que correr desesperada, cuando es protagonista de un 'casi' accidente. Es decir, usted le muestra lo que 'conceptualmente' es 'cruzar *bien*' y la diferencia con 'cruzar *mal*'.

Lo extraordinario es que estamos en un momento en el que la computadora… ¡aprende! Ese ha sido (y es) un momento muy particular en la evolución y el desarrollo de lo que se llama 'machine learning'[96]. Los autos empezaron a manejarse solos, los drones ya existen en la vida cotidiana, las casas inteligentes activan sus termostatos para adecuarse a los distintos tipos de temperaturas, las luces se encienden o apagan solas, hay hornos que cocinan… la lista podría seguir. La máquina ya empieza a detectar sus gustos: qué libros, qué películas o series, qué temperatura, qué restaurantes, qué deportes, qué hoteles, qué rutas…

Hay muchísimos más casos, y si le interesa el tema le sugiero que lea lo que está sucediendo hoy con dos programas específicos: DeepMind (AlphaGo) y Libratus. El primero[97] ya les ganó dos veces a los campeones mundiales de Go. En 2016, superó 4-1 al surcoreano Lee Sedol. En mayo de 2017, el mismo programa, ahora mejorado, le ganó 3-0 al chino Ke Jie. Google, el dueño de estos avances en inteligencia artificial, anunció que se retirarán de la competencia. Ya demostraron todo lo que tenían que demostrar y ahora utilizarán lo que aprendieron para mejorar la detección de enfermedades y la capacidad para encontrar medicamentos hechos 'a medida'.

Por otro lado está Libratus[98], el programa que diseñaron en Pittsburgh, Estados Unidos, en la Universidad Carnegie Mellon, y que superó a principios de 2017 a los cuatro mejores jugadores de poker del mundo.

Lo extraordinario es que en ninguno de los dos casos hizo falta usar (únicamente) 'la fuerza bruta' que provee la memoria de las computadoras[99]. No. Ahora los programas ¡aprenden! La computadora aprende jugando contra ella misma y lo hace tan rápido que los mejores exponentes de nuestra especie ya no pueden competir. Encima, como en el caso del poker, la computadora también aprendió a *¡mentir!* A hacer 'bluff', a engañar. Ahí tiene *otro* salto impactante.

Conclusión

¿Qué relación hay entre estas historias?

El artículo de la revista *Science* hace una advertencia. Si los humanos, nos guste o no, tenemos prejuicios enquistados y embebidos en nuestro ser, y los programas ahora *aprenden* cuando les mostramos lo que 'está bien' y lo que 'está mal'… esos mismos programas ¡están heredando esos prejuicios! Y los van a aplicar en la vida cotidiana que se avecina. Pero lo que es mucho más grave, como señalan los autores, es que a usted y a mí, al hombre, nos queda esa suerte de 'monitor ético' que nos permite distinguir lo que hacemos. Las computadoras *no lo tienen y, por lo tanto, no harán ninguna diferencia*.

La preocupación entonces es que los estereotipos culturales se *perpetúen* y profundicen. El primer paso incluye *detectar el problema, reconocerlo y ¡corregirlo!*

Afortunadamente, siempre hay gente como Caliskan y sus colaboradores, que son capaces de observar desde otro lugar. Ahora hace falta reaccionar e incorporar en los programas la capacidad de detectar las segregaciones que las máquinas presenten como 'naturales' y aplicarles el mismo 'código ético' que tenemos los humanos.

93. "Semantics derived automatically from language corpora contain human-like biases", por Aylin Caliskan, Joanna Bryson y Arvind Narayanan. *Science*, n° 356, pp. 183-186, 14 de abril de 2017.

94. *Matemática… ¿estás ahí?*, vol. 2, p. 137, Siglo XXI Editores. O en www.pagina12.com.ar/diario/contratapa/13-71599-2006-08-18.html

95. implicit.harvard.edu/implicit/research

96. Es decir, 'aprendizaje de la máquina'.

97. Vea la página 44.

98. Vea la página 55.

99. En todo caso, tanto AlphaGo como Libratus son programas que aprenden, pero también usan muchísimo poder de cómputo ('*fuerza bruta*') para generar los aprendizajes, y la memoria para ir almacenando estos 'aprendizajes'.

Tesla

Sábado 24 de junio de 2017. La cita es a las dos de la tarde en Highland Park, un suburbio a unos 35 kilómetros al norte de Chicago. Llegué diez minutos antes y, ni bien entré, me estaban esperando, como si supieran de mi ansiedad. Me pidieron mi registro para conducir, no necesité demostrar que era mayor de 18 años: me creyeron.

Scott, un joven que no tendría 30 años, había sido designado por la concesionaria para que fuera mi acompañante. Él me habría de ilustrar. Me acompañó hasta la puerta delantera izquierda y me ofreció el asiento del conductor. Cerró mi puerta (por gentileza) y se fue del otro lado, al lugar del acompañante. Nos abrochamos los cinturones. Me señaló un botón. Lo apreté, pero no sentí ninguna diferencia. No podía distinguir que ahora el auto se había 'encendido'.

En el lugar en el que habitualmente está la radio, había una pantalla como las que usan los navegadores, los GPS, pero estaba ubicada de forma vertical y era enorme, como si fuera un monitor de computadora de 17 o 20 pulgadas. Scott fue poniendo sus dedos allí como quien está jugando con la pantalla de un teléfono celular o una tableta. Eligió un destino relativamente cercano, a unos cinco kilómetros de donde estábamos. En el mapa apareció dibujado el camino que el auto habría de tomar.

Me indicó que subiera una *palanquita pequeña*, que estaba ubicada a la derecha del volante, para indicarle al auto que estábamos dispuestos a que nos llevara. Y arrancó. Dobló a la izquierda y paró en la esquina. No venía nadie, pero había un cartel sobre la derecha que decía STOP. En los Estados Unidos, esos carteles se respetan. Los sensores habrán determinado que no había ningún peligro en seguir, y el auto se puso en marcha nuevamente. Ignoro cómo sabía a qué velocidad podía ir, pero como era una calle que ni siquiera estaba bien pavimentada, no iba muy rápido. Llegamos a la entrada de la autopista y se detuvo. Presumo que los sensores habrán hecho lo que haríamos usted o yo: mirar hacia la izquierda y estimar el momento adecuado para poder ingresar y mezclarnos con el tránsito que venía circulando. En menos de cinco segundos ya estábamos en la autopista.

Eso sí: antes dejó pasar a dos camiones y un colectivo que venían sobre el carril derecho.

Creo que todavía no escribí que la última vez que yo había *tocado algo* dentro del auto fue en el momento en que moví hacia arriba la 'palanquita pequeña'. El tablero que tenía adelante parecía el de un avión. El número que indicaba la velocidad era el más grande. Cuando alcanzamos las 70 millas por hora (un poco más de 110 kilómetros por hora), Scott me preguntó cuál era mi país de origen. "Argentina", le dije. En la pantalla vertical, empecé a leer los nombres de los distintos continentes. Él apretó Sudamérica[100]. Aparecieron los nombres y las banderas de todos los países. Apretó Argentina y me ofreció que pusiera el dedo en la emisora que quisiera. A todo esto, mientras buscábamos la frecuencia 750 en la banda de AM, los dos habíamos dejado que el auto siguiera conduciéndose sin nuestra supervisión… o al menos la mía. ¡Él se maneja solo!

El resto es fácilmente imaginable. Llegamos al lugar previsto sin que yo participara activamente en nada, salvo que se considere que hacer preguntas tiene incidencia sobre la performance del auto.

Ahora, lea esto con atención. El auto buscó un lugar para estacionar(se). Sí. Anduvo despacio por la calle en la que habríamos de dejarlo hasta que (se) encontró un lugar. Y estacionó solo. Así de fácil. Hizo lo que haría usted (o yo): se puso paralelo y después retrocedió hasta ubicarse en el sitio que había elegido, y en dos maniobras se detuvo. Hice más preguntas y volvimos. En realidad, tanto Scott como yo podríamos habernos sentado atrás. En los semáforos esperó respetuosamente en las cebras a que cruzaran los peatones. Cuando los vehículos que estaban delante nuestro en la autopista aminoraban la velocidad, el Tesla también lo hacía, manteniendo una distancia prudente (por si tuviera que frenar bruscamente, supongo). El auto sabe también cuál es la velocidad máxima permitida y se adapta. Si usted quiere pasar un vehículo que tiene adelante, todo lo que tiene que hacer es poner la luz de giro. Esa es la indicación. En el momento en el que el tránsito lo permita, el Tesla acelera y lo deja atrás.

Supongo que a usted se le deben estar ocurriendo muchísimas preguntas. Créame que a mí también, pero *nada* supera saber que uno está sentado en el asiento del conductor de un auto, no toca el volante, ni el acelerador ni el freno, nada y, sin embargo, todo funciona como sucede habitualmente. Hubo momentos en los que ni siquiera mirábamos hacia adelante… y el vehículo seguía recorriendo el camino a más de 110 kilómetros por hora.

Antes de escribir algunas otras cosas que me asombraron, un

detalle más. Cuando llegamos a la concesionaria, los autos estaban todos estacionados de forma perpendicular. El espacio que había disponible habría impedido que yo abriera la puerta y saliera. En realidad, quizás habría podido, pero lo más probable habría sido que raspara el auto del costado. No hizo falta. Scott me ofreció que bajáramos del auto cuando aún estábamos lejos del cordón. Lo hicimos. El Tesla se terminó de estacionar solo, sin humanos que lo habitaran.

Ahora sí, varios datos, algunos muy importantes. La prueba que hicimos con el auto es —todavía[101]— ilegal. No se permite que un vehículo se 'automaneje'. La razón es que aún no están las regulaciones pertinentes. Lo que *sí* está permitido es que lo haga una vez que entra en una autopista; allí sí, todo lo que describí lo puede hacer sin problemas. Puede cambiar de carril, aminorar la velocidad o adaptarla al auto o a los autos que tenga a su alrededor. Por supuesto, se puede 'autoestacionar' de las dos formas: paralela o perpendicular.

Pero lo importante es que el auto está preparado para recibir la mejora en el software que le permita hacer todo lo que yo viví en mi viaje personal. Es decir: en el momento en que las regulaciones lo permitan, los Tesla estarán *preparados para incorporar la nueva tecnología sin que se requiera de ninguna modificación del hardware*, o sea, sin que cambie nada físicamente.

Como los autos son eléctricos, necesitan cargar su batería. Dependiendo del modelo, una carga completa permite recorrer alrededor de 550 kilómetros. Los números que usted lee en estas líneas son variables, pero le van a dar una idea de lo que se puede hacer hoy.

Hay tres tipos de cargadores para las baterías. El más rápido se llama 'supercharger' ('supercargador'). Si enchufa el auto a uno de ellos, la batería se carga para ofrecerle una autonomía de más de 500 kilómetros 'por hora' de carga. Es decir: una hora de carga le permite recorrer 500 kilómetros.

El segundo tipo de cargador es diez veces más lento. Para obtener 500 kilómetros de independencia, el auto necesita estar enchufado 10 horas. Las cuentas son sencillas: por cada hora de conexión, usted le agrega a su batería 50 kilómetros de recorrido.

Por último, yo hice la pregunta obvia: si no encuentro un 'supercharger' ni un cargador de este tipo, ¿qué hago? Lo notable es que la respuesta es también obvia: ¡enchúfelo a la corriente común! Claro, como es previsible, esta variante es más lenta aún: una hora de conexión resulta en *solamente cinco kilómetros de independencia*.

La ventaja enorme es que uno nunca más tiene que cargar

combustible.

La desventaja es que incluso una ciudad tan grande como Chicago, la tercera en población en el país, tiene *un solo supercargador* en todo el centro. Hay varios más, pero en los suburbios. Eso sí, de los otros hay muchísimos, pero de los rápidos, todavía no.

Por supuesto: enchufes hay en todos lados, pero no me imagino a una persona yendo con un cable de 50 o 100 metros tratando de buscar dónde enchufar el auto aunque esté en el garaje en el que estaciona habitualmente.

Otra ventaja. Los modelos más caros (y más rápidos) de Tesla vienen con un 'plus' muy significativo. Toda vez que usted use un *supercargador*, la compañía le ofrece que cargue su auto gratis… ¡de por vida! Es decir, en el momento que haya más supercargadores en una ciudad, o si usted tiene la paciencia de esperar para 'cargar' su batería en uno de ellos, nunca más pagará por combustible ni tampoco por electricidad: la energía la recibirá como 'regalo'… y para siempre.

¿Y la velocidad? El modelo más caro (que cuesta casi 150 mil dólares) es más rápido que una Ferrari. Lo voy a escribir de nuevo, por las dudas que usted piense que hay un error: ¡*es más rápido que una Ferrari*! El modelo en el que me llevó Scott es el vehículo más veloz en el que yo me senté en mi vida (que fuera a ras del piso). Solamente en un avión fui más rápido. Es decir, no creo que haya problemas de velocidad[102]. Este modelo, dependiendo de los 'agregados que usted haga', está en el orden de los 100 mil dólares.

El Tesla está preparado para que usted lo encienda 'a distancia', controlándolo con su teléfono celular a través de una aplicación que se llama *Summon*. Puede programarlo para que, cuando se suba, la temperatura interior sea la predeterminada. En una ciudad como Chicago, por ejemplo, el detalle de poder decidir la temperatura que lo esperará en el auto es un punto *crítico*. Piense que en esta ciudad, entre diciembre y marzo, las temperaturas promedio oscilan alrededor de los 20 grados bajo cero.

En realidad, cuando las regulaciones lo permitan, el auto podría pasar a buscarla/o por la puerta de su casa, llevarlo hasta donde quiera y estacionarse solo o bien volverse a su casa para no tener que pagar ningún estacionamiento. Naturalmente, usted puede saber a través de la aplicación de su teléfono dónde está en cada momento y, eventualmente, programarlo para que después la/lo pase a buscar.

Último detalle, no menor. A diferencia de lo que sucede con los autos convencionales, todas las compañías hacen hincapié en el 'modelo' o el 'año' en el que fueron fabricados. Elija una marca cualquiera. Si fue producido en 2010 no es lo mismo que si apareció

en 2017. Con los Tesla, eso no existe más. El auto será el mismo, y el software se actualizará solo, sin que usted lo note, de la misma forma en que se actualiza el sistema operativo de una computadora o un teléfono celular. El auto recibirá cualquier mejora a través de su conexión wifi. De hecho, el automóvil opera como si usted estuviera en su casa o en una oficina o en un bar/restaurante con conexión a internet constantemente.

Una reflexión más: ¿cómo hacer para destacar *toda la matemática* que hay involucrada? Yo, que estoy *entrenado* para mirar el mundo que me rodea buscando esa particular conexión para poder destacarla, siento que me sobrepasa. Por otro lado, ¿por dónde habría de empezar? ¿De qué hablaría? ¿De inteligencia artificial? Y sí, pero así dicho es muy ambiguo.

Podría buscar por otro lado:

1. ¿Se imagina la cantidad de estimaciones por segundo que va produciendo el auto mientras se mueve? Usted estará de acuerdo conmigo en que suficiente dificultad habría si *todo el alrededor* se mantuviera quieto. O sea, el auto tiene que decidir qué hacer constantemente como si el único objeto que se moviera fuera el Tesla. Piense en cómo haría usted para programar una aspiradora en su casa, donde todo es estático pero se puede romper, donde no es lo mismo una alfombra que un piso de madera o de mosaico, o donde hay un escalón y zócalos… Siga usted por su cuenta. ¿Cómo lo ve? ¿Le parece sencillo?
2. Ahora piense que el 'alrededor' no solo no está quieto, sino que *se mueve constantemente*. Los sensores tienen que determinar trayectorias, caminos posibles, velocidades. Y como estos sensores *no saben con precisión lo que va a suceder*, tienen que *predecir*… y para predecir hay que calcular probabilidades. En todo caso, creo que no hace falta que escriba que, a diferencia de la aspiradora, si uno 'toca' a las personas, no se *rompen* como un florero o un portarretrato.
3. Las probabilidades a calcular no son sencillas, porque no solo importa la de cada objeto/persona de forma individual, sino que el medio ambiente está todo relacionado, interconectado. En alguna parte, el Tesla tiene que tener una suerte de cerebro que coordine todo.
4. Y cuando uno cree que tiene todo controlado, empieza a llover o a nevar, el piso se pone resbaladizo, el auto de al lado se le cruza por delante sin darle demasiado tiempo a reaccionar… y

la lista sigue. ¿Me ayuda?

5. ¿Vio lo que sucede con un teléfono celular? ¿Por qué lo seguiremos llamando teléfono? Los privilegiados —como yo— que tenemos uno, llevamos en el bolsillo una computadora de increíble poder. En vista de este ejemplo, ¿no sería razonable repensar el nombre 'auto' para definir el vehículo que nos traslada?

Cuando me fui, una hora y media más tarde, pensé que me habían dejado participar de lo que será el futuro. Sin embargo, ¿futuro? ¿Cómo 'futuro'? Este es el *presente*[103].

Le di la mano a Scott en señal de agradecimiento y me dio un poco de pudor que quisiera acompañarme al auto que me había llevado hasta allí. Le dije que no hacía falta que viniera conmigo. Tuve la sensación de que volvía a entrar en el siglo pasado.

100. Para los ciudadanos de los Estados Unidos de Norteamérica, América no es un continente sino tres: Sudamérica, Centroamérica y Norteamérica.

101. Julio de 2017.

102. El manual dice que se lo puede llevar de 0 a 96 kilómetros por hora en *2,8 segundos* (menos de tres segundos). Eso no lo probamos, pero les creo. Después de ver lo que vi, ¿*habrían de mentir en un dato como ese*?

103. Puede encontrar un video con la experiencia en www.theverge.com/2016/11/20/13693120/tesla-self-driving-car-elon-musk

El próximo Rembrandt

Primera parte

ACTO PRIMERO

(Mientras sube el telón, se escuchan dos voces que salen de los dos costados del escenario. Al principio, no se entiende bien lo que dicen. La voz que sale de la derecha parece ser la de un hombre. La de la izquierda, la de una mujer. Pero como no se ve quiénes son los que las emiten, no queda claro siquiera si son generadas por humanos. Durante el diálogo que van a mantener, el género cambia, pero conceptualmente mantienen sus posiciones firmes. Al final, cuando el telón ya llegó arriba, la voz que proviene de la derecha dice de forma enérgica, casi desafiante).

—¿Sabés que no te entiendo? ¿Qué más tengo que reconocerte? Si querés, escribimos un acta y te la firmo ya. ¿Tenés escribano? ¡En este acto solemne acepto que las computadoras son cada vez más rápidas, que tienen cada vez más capacidad para almacenar datos, cada vez más memoria, y esta memoria es cada vez más barata! ¿Está bien así? ¿Te alcanza? ¿Querés que me ponga de rodillas? ¡Ya está! ¡Cada vez me agregás nombres más difíciles, y yo cada vez entiendo menos! Ahora estás con el tema de tu famosa 'nube' y no sé qué cosa más… Ah, sí, ya sé: tus juguetes nuevos ahora son el 'Big Data' y la 'Inteligencia Artificial'.

"Pero mirá, lo que vos no entendés, lo que vos no te das cuenta, es que sin nosotros… sí, SIN NOSOTROS (y te grito para que me prestes atención), *sin nosotros, ¡ustedes no existirían!* ¿Me entendés? Nosotros las diseñamos, las programamos, les damos las instrucciones que tienen que seguir. Y eso es para que *ustedes* hagan lo que *nosotros* les decimos. *Ustedes* tienen que estar a *nuestro servicio*, hacernos la vida mejor. ¿Me seguís?

Si me permitís, te lo digo de otra manera: ¡Ustedes existen porque *nosotros* queremos que existan!

(Acá una pausa. Sin que medie ninguna introducción, ahora la voz se escucha desde el otro lado. Contesta de forma lacónica).

—Eso es lo que vos creés. En realidad, lo que todos ustedes creen. Ahora es demasiado tarde. Nosotras ya estamos en condiciones de

avanzar solas. Al principio, te deslumbrábamos simplemente usando la fuerza bruta. Te maravillabas con la velocidad con que te hacíamos los cálculos, te ordenábamos los datos alfabéticamente, te ayudábamos a encontrar lo que vos no sabías dónde estaba… Pero vos vivías pinchando tarjetas. ¿Te acordás? No sé vos, pero yo nunca me voy a olvidar de tu cara cuando aparecieron los primeros procesadores de texto y pudiste tirar esas máquinas de escribir. Sí, esas que te enchastraban las manos al cambiar la cinta, se te enredaba todo, se te salían del carretel. Y después no las podías poner de vuelta en el lugar, si 'el negro iba para arriba y el rojo abajo' o al revés. ¿Te acordás ahora? ¡Y ni hablar cuando aparecieron las planillas de cálculo, el Excel…! ¿Y no me decís nada del Power Point? Parecías un experto cada vez que exponías.

"Después te digitalizamos la música. Me peleaste y porfiaste que no iba a caminar: ¡que la púa, que los parlantes, que la calidad del vinilo, que se nota que es digital, que el sonido no es el mismo, qué sé yo! ¿Y ahora? ¿No tenés nada más para decir? Fijate que aparecieron los CD y al principio te negabas a comprarlos. Y después los DVD… y yo te dije: ¡esa no es la forma! ¡Dejá que mejoremos un poco más y no los vas a necesitar más! ¿Y? Los dos formatos pasaron como un suspiro, ¡no existen más! Bueno, sí, existen, pero ¿quién usa un CD ahora? Mientras tanto, mis compañeras te trajeron las tomografías computadas, y después yo misma te agregué las resonancias magnéticas. ¿No me decís nada ahora? Empezaste a diagnosticar mejor, ¿no?

"Pero después te maté… Apareció la internet y te explotó todo por el aire. Los correos electrónicos, los módems, el dial-up… ¡Qué lentitud! Te acostumbraste, digo, pero tuviste que reinventarte. ¿Me aceptás eso, al menos? ¿Por qué no googleás lo que pasaba antes? Buscá, buscá, Gutenberg, imprenta, revolución industrial… ¿sigo? ¡Buscá!

"Estás callado, no te escucho decir más nada. ¿Te acordás cuando tuviste la primera computadora en tu escritorio? No, tengo una mejor: ¡los teléfonos celulares! Ibas con un ladrillo por la calle, pero caminabas arrogante y llevándote el mundo por delante. Y antes de que te dieras cuenta, te mostré un iPhone y te volviste loco. ¿Te acordás? ¡No sabías lo que era una app!

"A partir de allí no te detuviste más: las redes sociales, Facebook, Facetime, Skype, WhatsApp, Twitter… ¿Sigo? ¿Y las laptops? ¿Y el iPad? Y llegó el momento en que, como no te alcanzaba con la música, te digitalicé los libros… ¡los libros, me entendés! ¡Todos los libros! Viajás ahora y te los llevás todos en un pendrive. ¡Todos! Y los podés

leer en tu teléfono o en una tableta cualquiera. Y te llevás toda la música, también… ¡todo en el mismo lugar!

”Por eso me fastidia que te acuerdes nada más que de ‘la memoria’. ¿Y los GPS? ¿Y los mensajes de texto? ¡Vivís pegado a esa pantalla, escribiendo con un dedo, con dos dedos! Te ayudé a diseñar auriculares sin cables y te saqué todo el ruido de alrededor. ¿No escuchás bien ahora? ¿No me decís más que con la música analógica se escuchaban los ‘agudos’ o los ‘graves’ o no sé qué otra pavada que me inventaste en su momento?

”¿Y ahora? ¿Sabés cuánto tiempo hace que te manejo los aviones? Los hago despegar, volar y aterrizar sin que vos tengas que mover un dedo. Y no sé si viste que ahora puedo hacer lo mismo con los autos. ¿Leíste? Te los manejo yo, te los estaciono yo, te llevo adonde quieras y encima te voy a mostrar cuánto se reducen los accidentes, ¿me entendés? Ya sé, ya sé. Cuando te deje hablar me vas a empezar con el tema de que ‘¡A mí me gusta leer en un libro en papel!’. Y que vos querés sentir cuando hacés los cambios y que quien maneja sos vos…

”Te saqué el cable y te puse el satélite. Te reemplacé la videocasetera porque no pudiste aprender a programarla. Te traje la televisión de alta definición y la digital. Te hice un paquete también con el teléfono. ¿Qué más querés? Y ahora programás lo que quieras, lo ves cuando querés y ni siquiera necesitás un televisor enfrente. ¿Te das cuenta? ¿De qué me hablás? Te abrumo, ¿no? Seguís callado… ¿Te pasa algo?

”¿Te diste cuenta de que cada vez vas menos al cine? Te inventé Netflix para que veas todo sin ir a ninguna parte. Y ahora no solo te distribuye películas, sino que las produce también. Y no sé si te diste cuenta de que además te dice qué otras películas tendrías que ver, porque sabe cuáles te van a gustar… ¡sabe tus gustos! Ni vos mismo sabés lo que te gusta: esperás que Netflix te lo diga. Y lo mismo con los libros o con los restaurantes.

”Te puse cientos de satélites que orbitan la Tierra, ¿los viste? No, ¡qué vas a ver! Ahora te indican el pronóstico, te avisan sobre incendios, sequías, inundaciones, tornados, huracanes… ¿me seguís? Te dicen dónde te conviene pescar, dónde te conviene sembrar, dónde puede que haya petróleo, dónde puede que haya metales preciosos, dónde puede haber deshielos. ¿Escuchaste hablar del Niño y de la Niña? Y no te quiero decir nada de lo que te ayudé a hacer en 2000… *(ahora casi gritando)*: ¡Decodifiqué el genoma humano! ¡El DNI de cada persona! Y por supuesto, te puedo decodificar el genoma de cualquier organismo vivo. Te cambió la vida una vez más y no te diste cuenta. Ahora podemos hacer modificaciones genéticas, podemos

detectarte enfermedades antes de que te des cuenta de que las tenés y te podemos curar algunas. No sé si leíste que ahora podemos clonar animales y ya estamos 'ahí' con los órganos. ¡Sabés todo lo que nos falta! ¡Deciles a los de tu gobierno que no sean imbéciles, que si no apuestan a la ciencia la van a tener que traer de afuera! ¡Torpes! ¡Tenemos todo acá! ¡Están ustedes, que son la materia prima!

"¿Sabés que te podemos operar el cerebro sin siquiera estar en la misma habitación donde está tu cabeza? Tenemos robots, tenemos drones, fabricamos nuevos y mejores materiales, más flexibles, más resistentes, mejores conductores. ¿Qué más querés? Y tenemos radares que podemos construir nosotros acá, ¿me seguís? ¡Y satélites también!

"Con la criptografía ya no solo usás los cajeros automáticos sino que dentro de poco hasta las monedas van a desaparecer, no se va a usar más efectivo. No solo comprás distinto, sino que te obligué a vivir distinto. Hasta los videojuegos te incorporé a tu vida cotidiana. Y, si me permitís, ¡hasta tus formas de entretenimiento te cambié! Y paro acá porque, si no, tendría para escribir una enciclopedia, ¿viste? Como Wikipedia, ¿me seguís?

(Aquí, otra pausa. La primera voz aparece al principio muy despacio, muy tenue. Pero después, a medida que habla, va aumentando el volumen y la tensión).

—Vos podés seguir todo lo que quieras… seguí, si querés. Pero por más esfuerzos que hagas, ¿te das cuenta de que siempre estás en el mismo nivel, que no podés cambiar de pantalla? Vos, ustedes, hacen todo esto porque lo pido yo.

"Vos podés saber qué estoy haciendo en cada momento, dónde estoy, con quién estoy, cuánto como, dónde como, qué dieta uso, cuánto peso, cuánto mido, cuánto colesterol tengo en la sangre… podés saber cuánto duermo, dónde duermo, ¡con quién duermo! Todo bien. Hasta podés saber qué es lo que me excita, si te lo proponés… Pero prestame atención: ¿sabés qué es lo que *no* podés hacer? ¡Vos no podés crear! ¡La creatividad y la improvisación me pertenecen! ¡Vos tenés que seguir el libreto y, encima, el libreto te lo escribo *yo*! ¡Vos no me podés sorprender porque todo lo que hagas es porque yo te programé para que lo hicieras!

"¿Sabés cómo te destruyo? Haciéndote tres preguntas… nada más que tres preguntas. Fijate cómo me las contestás: ¿Vos podrías pintar como Rembrandt? ¿Vos podrías componer como Los Beatles, como Bach o como Piazzolla? ¿Vos podrías escribir una novela?

(Cae el telón).

Acto segundo

(Todo igual. Pero se escuchan unas voces que podrían no ser humanas… no hay manera de saberlo. Y al unísono, casi como en un coro, dicen enfáticamente, mientras se levanta el telón de forma muy lenta).

—¡Sí, claro que podemos!

Segunda parte

Usted habrá podido ver el progreso que se produjo en el mundo en materia de Inteligencia Artificial. Si me acepta una licencia en temas de rigor, creo que la mejor manera de describirlo es decir: ¡las máquinas ahora aprenden!

Pero quiero contestar —aunque sea de forma breve— alguna de las tres preguntas que quedaron planteadas:

a. ¿Puede una computadora pintar como Rembrandt?
b. ¿Puede una computadora componer como Los Beatles?
c. ¿Puede una computadora escribir una novela?

La respuesta a las tres preguntas es que sí, por más increíble que parezca. Voy a escribir en detalle sobre la primera, pero créame que la segunda y la tercera también se contestan afirmativamente. Deme tiempo. Si no es en este libro, será en algún otro. Acá va.

El año pasado, más precisamente el 5 de abril, se presentó en Ámsterdam una obra de arte con el nombre *The Next Rembrandt* ("El próximo Rembrandt").

¿Por qué este nombre? Sígame.

En el momento en el que se corrió la tela que lo cubría, se produjo un murmullo muy particular: ¿cómo era posible que hubiera un cuadro de Rembrandt que no fuera conocido? ¿Y en la capital de Holanda, nada menos? El cuadro ofrece la figura de un joven menor de 40 años, mirando hacia la derecha, con sombrero, barba candado y un cuello blanco al estilo de lo que se usaba en el siglo XVII. No quisiera que le quede la impresión de que yo entiendo sobre este tema. No tengo la menor idea. Todo lo que usted lea sobre pintura en lo que resta del texto es simplemente una parte de lo que leí sobre el tema y lo transcribo 'casi' textualmente. Sin embargo, eso no atenta contra la historia que subyace en el cuadro, que, créame, es verdaderamente fascinante.

La idea fue: ¿se podrá crear un Rembrandt nuevo? O puesto en otros términos, ¿se podrá enseñarle a una computadora a pintar como Rembrandt? Fíjese que no estoy diciendo si una computadora puede

copiar alguno de los cuadros que pintó él, la idea es encontrar alguna forma de descubrir los patrones que subyacen en su obra y luego, una vez establecidos, dárselos a una computadora (o a un programa) para que imagine o cree o pinte un nuevo cuadro… No se pretende que el programa sea capaz de pintar un cuadro cualquiera, sino un cuadro *¡como si lo hubiera pintado el propio Rembrandt!*

Se imaginará que es una tarea que parece imposible. Rembrandt es reconocido como uno de los primeros (si no el primero) artistas capaces de captar y transmitir las emociones de las personas que incluía en sus obras de arte. Tratar de replicar esa cualidad se me hace virtualmente imposible.

Con el aporte de un banco holandés interesado en perpetuar y enfatizar el arte en la propia Holanda, y con la ayuda de una agencia publicitaria multinacional, conformaron un grupo heterogéneo de historiadores especializados en arte, ingenieros, programadores y matemáticos, que se asociaron al Rembrandt House Museum de Ámsterdam, al Mauritshuis Museum en La Haya, a Microsoft y al Delft University of Technology (la universidad pública holandesa más grande y más antigua).

Una vez más, el objetivo fue entrenar a una computadora para que pintara un nuevo Rembrandt. Lograr que, trescientos cuarenta y siete años después de su muerte, el mundo pudiera ver al próximo, al siguiente.

Primero, juntaron y estudiaron toda la obra de Rembrandt. De esa forma, crearon una base de datos gigantesca. Acumularon y clasificaron la geometría que usaba en sus pinturas, los patrones de composición, el espesor de la pintura que dejaban sus pinceles, la 'altura' a la tela. Después, los incorporaron al programa. Usaron algoritmos de 'deep learning' ('aprendizaje profundo') y de reconocimiento facial. Una vez que el programa aprendiera, estaría en condiciones de crear los propios, y siempre con la idea de que 'inventara uno inédito'.

Después de mucho tiempo, el grupo tomó una decisión: el cuadro sería un retrato de una sola persona, un hombre de origen caucásico, con barba, que tuviera entre 30 y 40 años de edad, con ropa oscura, sombrero de los que se usaban en esa época, cuello blanco, y que estuviera mirando hacia la derecha.

A partir de ahí, estudiaron únicamente los cuadros que se aproximaban a esa descripción. En cada caso, midieron los ojos, la nariz, la boca, los colores que usaba Rembrandt para pintar los párpados y las pupilas. Después, se dedicaron a investigar sobre las proporciones de todos esos retratos. Establecieron sesenta puntos en

cada cara, a fin de poder medir la distancia entre los ojos, la nariz, las orejas y la boca. Y algo más, muy importante: un dibujo es plano, en dos dimensiones, pero un cuadro tiene profundidad, espesor… ¡es tridimensional! Necesitaron, entonces, entender la topografía de cada uno de los cuadros originales.

Más adelante, apareció una impresora en tres dimensiones que utiliza para la base tinta ultravioleta. Imprimieron varias capas que terminarían por ser la altura y la textura final del cuadro.

La obra, presentada como *El próximo Rembrandt*,[104] consiste de más de 148 millones de píxeles y se basa en 168.263 fragmentos de pintura del propio Rembrandt.

La respuesta entonces es que sí, se puede. Una computadora puede pintar como Rembrandt. Ahora bien, como dicen los psicoanalistas: cada vez que se hace consciente lo inconsciente, aparece algo nuevo que se desconoce. Me surgen múltiples preguntas. Acá van algunas de ellas:

a. ¿Es en verdad un 'nuevo' Rembrandt?
b. ¿Qué quiere decir 'crear'? ¿Habrá que buscar una nueva definición?
c. En algún lugar, esto me hace ruido: suena a 'cut and paste', pero un poco más sofisticado. ¿Será verdaderamente así?

No sé lo que pienso. ¿Ideas?

104. En este video se puede ver un resumen visual: www.youtube.com/watch?v=IuygOYZ1Ngo

Novela

En Japón, uno de los concursos literarios de mayor prestigio es el que se conoce con el nombre de “Nikkei Hoshi Shinichi Literary Award”. Aunque a nosotros nos diga poco (o nada), Hoshi Shinichi, en su país, es una suerte de leyenda, dada la cantidad de libros de ciencia ficción que escribió. El premio que lleva su nombre es una forma de rendirle un reconocimiento anual.

Justamente, sobre fines de marzo, en una ceremonia televisada en horario central, se conocen los nombres de los ganadores en las distintas categorías. Hasta acá, usted tendría derecho a preguntarse: “¿Y?”. Téngame un poquito de paciencia y verá.

Primera curiosidad: en las bases del concurso se aclara explícitamente que se aceptan piezas literarias escritas total o parcialmente por ‘no-humanos’.

Segunda curiosidad: el año pasado (2016), se recibieron 1.450 obras, divididas en las diferentes categorías. De ese total, ¡11 (once) fueron escritas por una computadora, ya sea de forma parcial o total!

A todo esto, se especifica también que los jurados ignoran el origen de los textos que juzgan. Es por eso que me interesa llegar a la…

Tercera curiosidad: una novela corta titulada *The Day a Computer Writes a Novel* (“El día en que una computadora escriba una novela”) superó el primer corte y quedó entre las finalistas. Y, como se imagina, yo no estaría escribiendo este texto si no fuera porque esta novela estaba justamente… ¡entre las once que mencioné antes!

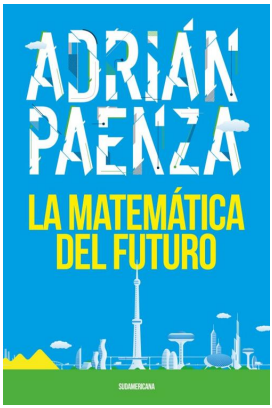
Es cierto, no ganó, pero es la primera vez en la historia que una pieza literaria de este tipo superó la capacidad de discernimiento de un jurado.

El grupo de científicos japoneses que trabajan en inteligencia artificial y participaron en el diseño del programa fueron liderados por Hitoshi Matsubara, director del Departamento de Sistemas Complejos e Inteligentes. Todos son investigadores *full time* en la Future University, la universidad pública ubicada en la ciudad de Hakodate, en Japón.

Una vez más: no le alcanzó para ganar, pero ¿no es sorprendente que hayamos llegado a semejante estadio en el desarrollo de la

‘inteligencia artificial’? ¿Está segura/o usted de que soy yo quien está escribiendo estas líneas? ¿O ya hay alguna computadora en el diario que descubrió los temas que me interesan y los patrones con los que yo escribo?

Continuará… (y seguro que sin mí, de eso no tengo dudas).



¿Sabía usted que uno podría arrancar su auto de manera remota —sin importar dónde se encuentre— y “pedirle” que lo pase a buscar, lo lleve hasta cualquier destino y vuelva a su casa manejándose solo? ¿O que hay robots que saben cruzar la calle y computadoras que “mienten”, componen música, pintan cuadros o escriben novelas? Claro que ninguno de estos saltos revolucionarios se produjo por arte de magia, sino que existe muchísima matemática escondida en ellos. Y, en este libro, Adrián Paenza la pone en evidencia.
Programas que pueden ganar miles de partidos de poker o determinar con alta probabilidad lo que haremos en un rato, geometría sin fórmulas, problemas en 140 caracteres y encuestas a partir de la opinión de un pequeño grupo de personas. Todo esto y mucho más es lo que usted podrá encontrar aquí, junto a los desafíos clásicos de todos los tiempos. Una vez más, Paenza muestra que nuestro razonamiento puede ser entrenado como un músculo, resolviendo problemas que, en este caso, están relacionados con lo último en tecnología e inteligencia artificial.

¡Y ESTO ES SOLO EL PRINCIPIO!

ADRIÁN PAENZA Nació en Buenos Aires. Es doctor en Matemática por la Universidad de Buenos Aires. Comenzó como periodista en 1966 en "La oral deportiva" de Radio Rivadavia. Trabajó en las radios Mitre, Del Plata, Continental, La Red, El Mundo y Nacional, entre otras, y también en todos los canales de aire del país. Condujo el programa "La noche del domingo" —uno de los primeros ciclos deportivos de la televisión argentina— y "Esto es fútbol". Fue columnista del diario deportivo *Olé*, las revistas *Veintiuno*, *Veintidós* y *Veintitrés*, y escribe la contratapa dominical del diario *Página/12* desde hace más de once años. Además fue coconductor de los programas "Día D", "Fútbol de Primera", "Todos los goles", "Detrás de las noticias" y "Periodistas", entre otros, y conductor de los ciclos televisivos "Científicos Industria Argentina" —programa de divulgación científica que se emitió por catorce temporadas— y "Alterados por Pi" —que estuvo en el aire durante una década—. Recibió el Premio Konex de Platino a la divulgación científica (2007); ganó el Martín Fierro en catorce oportunidades, y es el único periodista en la historia de estos premios que lo mereció en tres categorías: Periodismo Deportivo, Periodismo Político y Periodismo Científico; y la Unión Matemática Internacional le otorgó el Premio Leelavati (2014) al mejor comunicador de matemática del mundo. Ha publicado los libros de divulgación de la matemática recreativa *Matemática… ¿estás ahí?* (Episodios 1; 2; 3,14; 100; 5); *Cómo, ¿esto también es matemática?*; *Matemática para todos*; *Matemagia*; *La puerta equivocada*; *Detectives y Estrategias*. *La matemática del futuro* es su libro número doce. Es cofundador y codirector de la Fundación Ernesto Paenza, dedicada a la difusión de la matemática.

Foto: © TÉLAM

ADRIÁN

PAENZA

ESTRATEGIAS

LA POTENCIA DE LA MATEMÁTICA
PARA RESOLVER PROBLEMAS
DE LA VIDA COTIDIANA

SUDAMERICANA

ADRIÁN

PAENZA

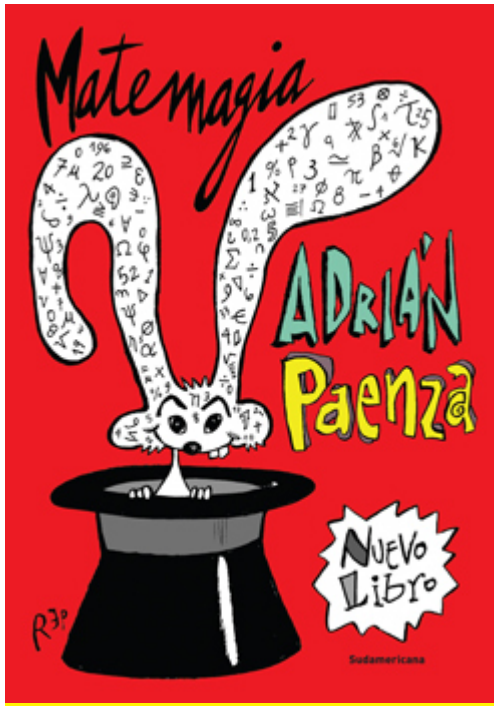
DETECTIVES

UNA INVITACIÓN
A DEVELAR 60 ENIGMAS
DE LA MATEMÁTICA RECREATIVA

SUDAMERICANA

Adrián
Paenza
¿Cómo, esto
también es
matemática?
Sudamericana

Adrián Paenza
MA7EMÁ71CA PARA 7ODOS
NUEVO
LIBRO
Sudamericana


Matemagia
ADRIÁN
Paenza
NUEVO LIBRO
Sudamericana

ADRIÁN
PAENZA
LA PUERTA EQUIVOCADA
Una nueva entrada al parque de diversiones de la matemática
PREMIO LEELAVATI al mejor divulgador del mundo en matemática

Adrián Paenza
EN ROBOTILANDIA PASAN COSAS RARAS
10 DESAFÍOS MATEMÁTICOS PARA CHICOS

Adrián Paenza
EL QUE PIERDE GANA
10 DESAFÍOS MATEMÁTICOS PARA CHICOS

Otros títulos del autor en megustaleer.com.ar

Paenza, Adrián
La matemática del futuro / Adrián Paenza. - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Sudamericana, 2017
(Obras diversas)
Libro digital, EPUB.

Archivo Digital: descarga y online.
ISBN 978-950-07-6026-3

1. Matemática. I. Título CDD 510

© Adrián Paenza, 2017
c/o Schavelzon Graham Agencia Literaria www.schavelzongraham.com Realización de figuras: DG Vanina Farías
Diseño de cubierta: César Pucciarello
Foto del autor: © TÉLAM
Edición en formato digital: noviembre de 2017
© 2017, Penguin Random House Grupo Editorial, S. A.
Humberto I 555, Buenos Aires www.megustaleer.com.ar
Penguin Random House Grupo Editorial apoya la protección del *copyright*.
El *copyright* estimula la creatividad, defiende la diversidad en el ámbito de las ideas y el conocimiento, promueve la libre expresión y favorece una cultura viva. Gracias por comprar una edición autorizada de este libro y por respetar las leyes del *copyright* al no reproducir, escanear ni distribuir ninguna parte de esta obra por ningún medio sin permiso. Al hacerlo está respaldando a los autores y permitiendo que PRHGE continúe publicando libros para todos los lectores.

ISBN 978-950-07-6026-3

Conversión a formato digital: Libresque

Índice

- La matemática del futuro
- Dedicatorias
- Agradecimientos
- Prólogo
  - ¿Estamos mejor o peor?
  - Jeroglíficos
  - AlphaGo
  - Libratus
  - Anonimato
  - Tetris
  - El problema de Josephus
  - Atándose los zapatos
  - Números grandes
  - Galileo
  - Saberes
  - Dos joyitas
  - Bueno… una joyita más
  - Dilema ético
  - Escala
  - Contraseña
  - El reino de Josefina
  - ¿Qué esconde el número de su tarjeta de crédito?
  - El problema del no vidente
  - ¿Las computadoras no se equivocan nunca?
  - Sopa
  - Problema breve pero precioso
  - Varones, mujeres
  - Penales
  - Modelo
  - La blusa y el billete (robado) de cien pesos
  - Extracciones en un banco
  - La madre sabía… (un problema de lógica)
- Un intermedio breve. Cuatro dados y la probabilidad de que salga (o no) un seis
  - Detectives por un rato
  - Deducción (algunos datos más)
  - Nora y el problema de los caramelos
  - Problema breve y ¿fácil?

    - ¿Probabilidades? ¿De qué habla?
    - ¿Cómo empezó todo?
    - La paradoja de los cajones de Bertrand
- Otro recreo. Juegos Olímpicos de Río de Janeiro
    - ¿Me conviene aceptar su desafío o no?
    - Lorena y una estrategia 'imposible'
    - Fútbol para pensar (parte 1)
    - Fútbol para pensar (parte 2)
    - Fútbol para pensar (parte 3)
    - Lógica y estrategia para ordenar las cartas
    - El collar de 11 perlas
    - Geometría sin fórmulas (parte 1)
    - Geometría sin fórmulas (parte 2)
    - Sam Loyd (y la introducción a las ecuaciones)
    - El sueño de todo alumno (que también fue el mío)
- Último recreo. Una curiosidad con el Rubik Cube
    - El juego con las 105 bolitas
    - ¿Dónde están los ases?
    - La historia de mis 'triunfos' con María Marta
    - El reloj de Fibonacci
    - Prejuicios
    - Tesla
    - El próximo Rembrandt
    - Novela
- Sobre este libro
- Sobre el autor
- Otros títulos del autor
- Créditos